

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Alain THIRARD

ingénieur ENSMM

**ETUDES TOPOGRAPHIQUES DES VIBRATIONS
DE CISAILLEMENT D'ÉPAISSEUR
DE RÉSONATEURS A QUARTZ**

Soutenue le 10 juin 1980 devant la Commission d'Examen :

MM. R. BESSON

Président

R. CHALEAT

J. BALBI

D. GILLET

J. MICHEL, ingénieur E.P.F.Z.

}
Examineurs

P. MESNAGE

Invité

Diss Besançon

THÈSE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

DIPLOME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Alain THIRARD

Présentée et soutenue publiquement

ETUDES TOPOGRAPHIQUES DES VIBRATIONS
DE CISAILEMENT D'ÉPAISSEUR
DE RÉSONATEURS À QUARTZ

Soutenance le 10 juin 1985 devant le Jury composé de :

M. A. BESSON

Président

M. CHALFAY

J. BALDI

D. JULOT

P. BERNARD

P. BERNARD

https://archive.org/details/IA41546609_0013

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Alain THIRARD

ingénieur ENSMM

**ETUDES TOPOGRAPHIQUES DES VIBRATIONS
DE CISAILLEMENT D'ÉPAISSEUR
DE RÉSONATEURS A QUARTZ**

Soutenue le 10 juin 1980 devant la Commission d'Examen :

MM. R. BESSON

Président

R. CHALEAT

J. BALBI

D. GILLET

J. MICHEL, ingénieur E.P.F.Z.

}
Examineurs

P. MESNAGE

Invité

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Jacques ROBERT

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSEESSEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

PRÉSIDENTS HONORAIRES

MM. THIEBAUT, LÉVÊQUE

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET, THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN, THEOBALD N., THIRY,
TRILLAT, TRONCHET, UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques
BENILAN Philippe	: Mathématiques
BERNARD Jean	: Chimie Physique
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale
BROQUET Paul	: Géologie
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée
CHARDON J-Claude	: Spectroscopie
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie
COUGNARD Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle
DOBREMEZ Jean-Fr.	: Biologie
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire
GAUDEMER Yves	: Biochimie
GIRARDET Claude	: Physique Moléculaire
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie
GOUARNE René	: Mathématiques
GRAS Georges	: Mathématiques
GREMILLARD Jean	: Mathématiques
KARCHE J-Paul	: Pétrographie Minéralogie
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée
LAUDE Bernard	: Chimie organique
LESAINT Pierre	: Mathématiques I

LHOTE François	: Automatique
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales
MIELLOU J-Claude	: Analyse numérique
MILLET Bernard	: Botanique
MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
MOREELS Guy	: Astronomie
OLIVIER Marchel	: Electroniq. quantique
OYTANA Claude	: Mécanique appliquée
PAGETTI Jacques	: Corrosion et traitements de surface
PARIZET Jean	: Mathématiques
PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
POTIER Robert	: Physique des solides
RANGHEARD Yves	: Géologie
RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
ROBERT Daniel	: Physique
ROBERT Guy	: Electrochimie
ROBERT Jacques	: Mathématiques I
THEOBALD J-Gérard	: Spectroscopie hertzienne
THIEBAUT Jean	: Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel	: Informatique
VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
VIENOT Jean-Charles	: Physique Gle optique
WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE

Professeurs des Instituts Universitaires de Technologie dont les activités de Recherche sont rattachées à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon

I.U.T. de BESANÇON

MM. GENTYL Claude	Spécialité : Physique
MARTINET André	Spécialité : Chimie
SONZOGNO Robert	Spécialité : Mécanique

I.U.T. de BELFORT

MM. KAUFFMANN J-Marie	Spécialité : Electrotechnique
MANDRET Gérard	Spécialité : Electronique
OIKNINE Claude	Spécialité : Mécanique
PRENEL Jean-Pierre	Spécialité : Physique
STAMON Georges	Spécialité : Informatique

Je tiens à remercier Monsieur BESSON pour l'accueil qu'il m'a réservé au sein du Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité.

Je tiens à dire combien je suis reconnaissant à Monsieur MESNAGE d'avoir bien voulu lire ce travail et participer à ce Jury.

Je remercie Monsieur CHALEAT de bien vouloir examiner mon travail et Monsieur BALBI avec lequel nous avons eu de nombreux échanges.

Je remercie Monsieur MICHEL, Chef du Département d'Electronique d'A.S.U.L.A.B. SA. d'avoir accepté de faire partie de ce Jury.

Ce travail n'a été possible que grâce à la continuelle attention de Monsieur GILLET et l'apport que m'a procuré les nombreux entretiens que nous avons eus. Qu'il trouve ici l'expression de mon amicale reconnaissance.

Je tiens aussi à dire combien il m'a été agréable de travailler avec Gérard GENESTIER qui m'a initié à la Topographie et sans lequel cette thèse n'aurait pu avoir son plein développement.

Je remercie Bernard DULMET pour les contacts fructueux que nous avons eus ainsi que Monsieur DECATILLIOT et Monsieur BOURQUIN.

Je remercie aussi Messieurs MOUREY, BERTHAUT, et Messieurs CASSARD, PERY, RENARD et THIEBAUD qui m'ont aidé dans mes réalisations d'électronique et de Mécanique.

Enfin, je remercie Madame DUBOIS Martine pour la gentillesse avec laquelle elle a effectué le travail de frappe de ce mémoire.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE I - MODES DE VIBRATION D'UN RÉSONATEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

A - ONDES DE VOLUME DANS UN MILIEU PIEZOELECTRIQUE	3
B - MODELE DE RESONATEUR UNIDIMENSIONNEL	7
C - RESONATEURS PLAN CONVEXES OU BICONVEXES	9

CHAPITRE II - ETUDE EXPÉRIMENTALE - 15

A - DETECTION DES RESONANCES-	17
1/ Courbe amplitude-fréquence "électrique"	18
2/ Courbe amplitude-fréquence "mécanique"	18
B - DIFFRACTION DES RAYONS X - TOPOGRAPHIE -	
1/ Cristallographie et diffraction X	21
2/ Topographie :	22
a) Technique	
b) Utilisation	
3/ Rayonnement X et surface photographique.	27
4/ Observations et remarques préalables aux expériences.	30
5/ Topographie de section de quartz en vibration.	31
C - EXPERIENCES ET RESULTATS -	34
1/ Quartz de convexité sphérique.	39
2/ Quartz de convexité non sphérique.	53
D - OBSERVATIONS COMPLEMENTAIRES ET EFFETS PARTICULIERS -	
a) Déplacement u_2	57
b) Déplacement u_3	58
c) Effet de couplage et génération de fréquence inférieure ou supérieure.	59

<u>CHAPITRE III</u>	- SYNTHÈSE DES MODES DE VIBRATION D'UN RÉSONATEUR A QUARTZ PLAN-CONVEXE DE COUPE AT -	
A - DESCRIPTION DES MODES		67
B - COMPLEMENTS A L'ETUDE DES PARTIELS		72
C - MISE EN VIBRATION D'UNE COUPE AT SUR LE MODE B - VERIFICATION DE LA PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES -		72

<u>CONCLUSION</u>		76
-------------------	--	----

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>		78
----------------------	--	----

ANNEXE I	: RÉALISATION DES SPECTRES ÉLECTRIQUES ET MÉCANIQUES	82
----------	--	----

ANNEXE II	: SIMULATION DE MODES DE VIBRATION	84
-----------	------------------------------------	----

ANNEXE III	: TABLEAUX : FRÉQUENCES ET COEFFICIENTS.	90
------------	--	----

I N T R O D U C T I O N

Le présent travail a été effectué au laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité de l'E.N.S.M.M. dans le cadre de recherches sur les phénomènes et les milieux piézoélectriques avec application aux résonateurs à quartz. Les études étant conduites au Laboratoire depuis l'aspect fondamental jusqu'à la fabrication effective de résonateurs, nous avons mis à profit cet aspect original.

Notre étude porte sur l'investigation topographique des modes de vibration de résonateurs à ondes de volume et hautes fréquences; elle se place à la suite des études fondamentales menées sur le résonateur à quartz au Laboratoire (Balbi - Duffaud - Dulmet - Besson - Gillet). Nous disposons d'un appareillage complet de topographie de Lang (générateur à anode tournante - table goniométrique de Lang - type CNRS - Authier Rinsky).

Si l'on essaie de reconstituer la démarche des théoriciens qui ont entrepris des études sur des résonateurs proches de la réalité, on s'aperçoit que souvent ils ont été guidés dans les solutions qu'ils proposent par l'aspect expérimental. La topographie aux Rayons X mise au point par A. Lang en 1959 est un outil de choix pour préciser la nature et les caractéristiques diverses (répartition spatiale, allure, type de vibration, amplitude) des différents modes de résonances. Ainsi guidé par les topographies réalisées par Spencer (1968) C.J. Wilson puis H.F. Tiersten ont pu résoudre des systèmes simplifiés d'équations aux dérivées partielles et obtenir cependant un calcul très précis des fréquences propres des résonateurs plan-convexes. Les travaux sur ce sujet sont particulièrement nombreux et complexes (Mindlin - Tiersten - Smythe - Auld - Ballato-).



Dans une première partie, nous avons repris les modèles théoriques successivement proposés afin d'être guidés pour établir un premier inventaire des différents modes présents dans un résonateur H.F. de coupe AT. Nous avons essayé de nous forger une représentation des mécanismes physiques en cause dans les spectres très complexes obtenus pour un résonateur plan-convexe.

Dans la seconde partie, nous décrivons brièvement la technique topographique et ses caractéristiques propres permettant l'exploitation des clichés obtenus. Nous décrivons aussi le montage qui nous a permis l'étude des spectres de résonance des pastilles de quartz. Nous avons été amené à distinguer deux aspects du problème : celui lié aux résonances mécaniques d'une pastille de quartz et celui lié aux résonances électriques.

Puis nous exposons l'ensemble des expériences que nous avons pu effectuer et qui nous ont permis de bâtir une étude des différents modes de vibration possibles des résonateurs plan-convexes vibrant en cisaillement d'épaisseur. Le cisaillement d'épaisseur étant le déplacement principal (noté u_1 ou u_x) nous terminons cette troisième partie par une étude des déplacements secondaires souvent négligés (noté u_2 et u_3 ou u_y et u_z) et par quelques effets non linéaires que nous avons eu l'occasion d'observer au cours de nos expériences sur les résonateurs.

Nous citons enfin quelques expériences originales que cette étude nous a suggérées et qui nous ont permis de vérifier la validité de certains modèles théoriques (Christoffel - Tiersten - mise en évidence de fréquences de modes à indices m, p impairs, n pairs et résonances de mode B dans une coupe AT).

C H A P I T R E I

MODES DE VIBRATION D'UN RESONATEUR PIEZOELECTRIQUE

A - ONDES DE VOLUME DANS UN MILIEU PIÉZOÉLECTRIQUE :

Les équations constitutives des milieux piézoélectriques sont :

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{ijk} E_k$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik} E_k$$

ou avec la notation à simples indices : $T_{\alpha} = c_{\alpha\beta} S_{\beta} - e_{\alpha k} E_k$

$$D_i = e_{i\beta} S_{\beta} + \epsilon_{ik} E_k$$

Les vitesses des ondes acoustiques étant beaucoup plus petites que celles des ondes électromagnétiques, il est convenu de considérer le champ électrique dans l'approximation quasistatique et d'écrire :

$$E_k' = - \phi_{,k}$$

Avec l'équation fondamentale de la dynamique

$$T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_j$$

et l'équation de Poisson pour un corps isolant

$$D_{i,i} = 0$$

nous obtenons les équations suivantes :

$$c_{ijkl} u_{l,jk} + e_{ijk} \phi_{,jk} = \rho \ddot{u}_i \quad (1-1)$$

$$e_{jkl} u_{l,jk} - \epsilon_{jk} \phi_{,jk} = 0$$

$$T_{11} = c_{11}u_{1,1} + c_{12}u_{2,2} + c_{13}u_{3,3} + c_{14}(u_{2,3} + u_{3,2}) + e_{11}\phi_{,1}$$

$$T_{22} = c_{12}u_{1,1} + c_{22}u_{2,2} + c_{23}u_{3,3} + c_{24}(u_{2,3} + u_{3,2}) + e_{12}\phi_{,1}$$

$$T_{33} = c_{13}u_{1,1} + c_{23}u_{2,2} + c_{33}u_{3,3} + c_{34}(u_{2,3} + u_{3,2}) + e_{13}\phi_{,1}$$

$$T_{23} = c_{14}u_{1,1} + c_{24}u_{2,2} + c_{34}u_{3,3} + c_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) + e_{14}\phi_{,1}$$

$$T_{31} = c_{55}(u_{3,1} + u_{1,3}) + c_{56}(u_{1,2} + u_{2,1}) + e_{25}\phi_{,2} + e_{35}\phi_{,3}$$

$$T_{12} = c_{56}(u_{3,1} + u_{1,3}) + c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}) + e_{26}\phi_{,2} + e_{36}\phi_{,3}$$

$$D_1 = e_{11}u_{1,1} + e_{12}u_{2,2} + e_{13}u_{3,3} + e_{14}(u_{2,3} + u_{3,2}) - \epsilon_{11}\phi_{,1}$$

$$D_2 = e_{25}(u_{3,1} + u_{1,3}) + e_{26}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \epsilon_{22}\phi_{,2} - \epsilon_{23}\phi_{,3}$$

$$D_3 = e_{35}(u_{3,1} + u_{1,3}) + e_{36}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \epsilon_{23}\phi_{,2} - \epsilon_{33}\phi_{,3}$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1 &= c_{11}u_{1,11} + (c_{12} + c_{66})u_{2,12} + (c_{13} + c_{55})u_{3,13} + (c_{14} + c_{56})u_{2,13} \\ &\quad + (c_{14} + c_{56})u_{3,12} + 2c_{56}u_{1,23} + c_{66}u_{1,22} + c_{55}u_{1,33} \\ &\quad + e_{11}\phi_{,11} + e_{26}\phi_{,22} + (e_{36} + e_{25})\phi_{,23} + e_{35}\phi_{,33} \end{aligned}$$

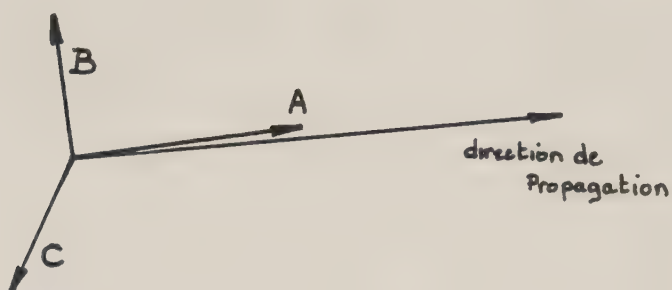
$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_2 &= c_{56}u_{3,11} + (c_{56} + c_{14})u_{1,13} + (c_{66} + c_{12})u_{1,12} + c_{66}u_{2,11} \\ &\quad + c_{22}u_{2,22} + (c_{23} + c_{44})u_{3,23} + 2c_{24}u_{2,23} + c_{24}u_{3,22} \\ &\quad + c_{34}u_{3,33} + c_{44}u_{2,33} + (e_{26} + e_{22})\phi_{,12} + (e_{36} + e_{14})\phi_{,13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_3 &= c_{55}u_{3,11} + (c_{55} + c_{13})u_{1,13} + (c_{56} + c_{14})u_{1,12} + c_{56}u_{2,11} \\ &\quad + c_{24}u_{2,22} + 2c_{34}u_{3,23} + (c_{44} + c_{23})u_{2,23} + c_{44}u_{3,22} \\ &\quad + c_{33}u_{3,33} + c_{34}u_{2,33} + (e_{25} + e_{14})\phi_{,13} + (e_{35} + c_{13})\phi_{,13} \end{aligned}$$

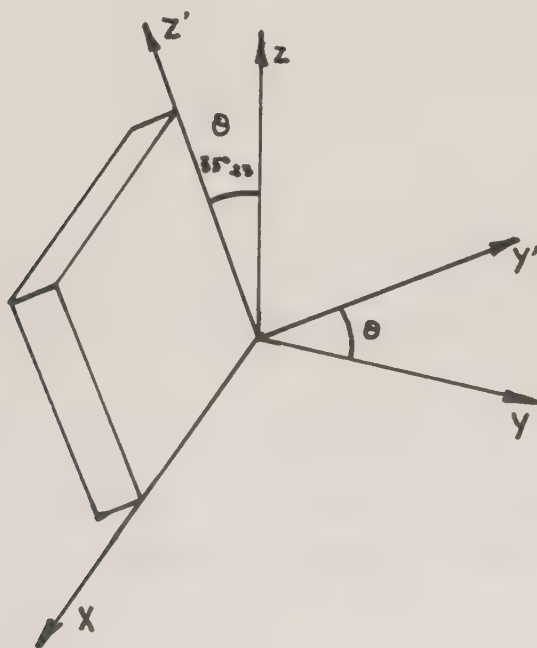
$$\begin{aligned} &e_{11}u_{1,11} + (e_{12} + e_{26})u_{2,12} + (e_{13} + e_{35})u_{3,13} + (e_{14} + e_{36})u_{2,13} \\ &\quad + (e_{14} + e_{25})u_{3,12} + (e_{25} + e_{36})u_{1,23} + e_{26}u_{1,22} \\ &\quad + e_{35}u_{1,33} - \epsilon_{11}\phi_{,11} - \epsilon_{22}\phi_{,22} - 2\epsilon_{23}\phi_{,23} - \epsilon_{33}\phi_{,33} = 0 \end{aligned}$$

Une théorie due à Christofel [46] montre l'existence de trois ondes acoustiques se déplaçant à des vitesses différentes dont les directions de polarisation sont perpendiculaires : une onde (quasi) longitudinale - notée généralement mode A -

deux ondes (quasi) transversales - notées mode B et C.



Dans la multitude des coupes de quartz possibles et réalisées, la coupe AT ou coupe à simple rotation (coupe perpendiculaire à l'axe $y + \theta$ $\theta \approx 35^\circ 23'$) figure 1, est employée pour la réalisation de quartz haute fréquence vibrant sur le mode C en cisaillement d'épaisseur.



Compte-tenu des éléments de symétrie ($A_3 \ 3A_2'$) [16], les coefficients élastiques et diélectriques à simple indice de la coupe AT sont les suivants (matrices écrites dans les axes $xy'z'$ de la pastille) (figure 1) :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ 0 & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ce sont les coefficients d'un milieu à symétrie de classe 2.

En métallisant les deux faces perpendiculaires à y' d'une coupe AT, nous remarquons que le champ E_2 que l'on peut établir ne peut exciter qu'un seul mode de cisaillement suivant l'axe x , se propageant suivant y .

$$T_\alpha = c_{i\alpha} E_i \quad \text{pour } E_2 \quad \begin{cases} T_5 = e_{25} E_2 = T_{31} \\ T_6 = e_{26} E_2 = T_{21} \end{cases}$$

Ce mode est noté mode C et dans le cas de la coupe AT son déplacement est rigoureusement parallèle à l'axe $\vec{x}$ (voir coef. en Annexe) cela simplifie considérablement le spectre de résonance électrique obtenu avec ce type de coupe.

Notre étude se limite d'ailleurs aux différents modes de résonance de ces coupes et plus particulièrement des pastilles plan-convexes du type de celles réalisées au laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité de l'E.N.S.M.M. dont nous présentons un exemple ci-après.

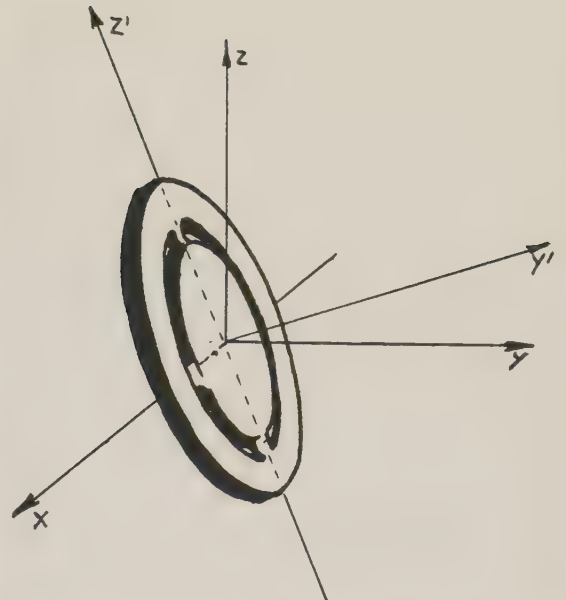
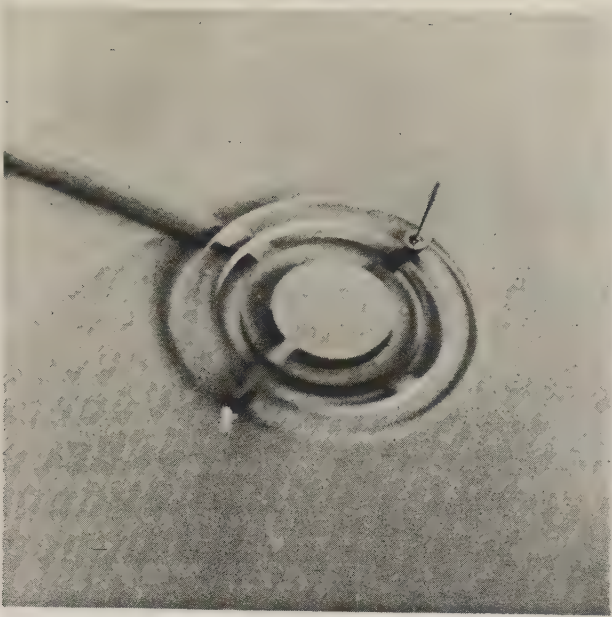


Figure 1

B - MODÈLE DE RÉSONATEUR UNIDIMENSIONNEL :

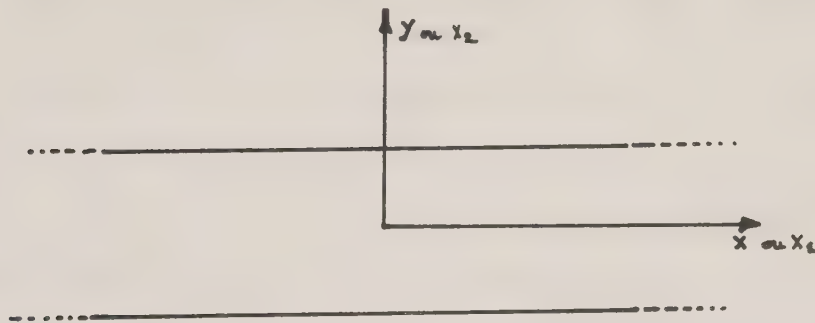
Dans une première approximation, le système (1-1) d'équations est résolu pour un modèle à une dimension, dans lequel on a donc $u_{1,1} = 0$:

$$c_{66} u_{1,22} + e_{26} \phi_{,22} = \rho \ddot{u}_1$$

$$e_{26} u_{1,22} - \epsilon_{22} \phi_{,22} = 0$$

qui donne $\overline{c}_{66} u_{1,22} - \rho \ddot{u}_1 = 0$ avec $\overline{c}_{66} = c_{66} + \frac{e_{26}^2}{\epsilon_{22}}$

en disposant les axes comme suit :



et avec les conditions aux limites électriques imposées:

$$\phi = \pm \phi_0 \cos \omega t \text{ pour } x_2 = \pm h$$

la solution est $u_2 = A \sin \eta x_2 \cos \omega t$ qui donne $\eta^2 = \frac{\rho \omega^2}{c_{66}}$;

des fréquences de résonance sont données par l'équation :

$$\omega h \sqrt{\frac{\rho}{c_{66}}} = \frac{e_{26}^2}{c_{66} \epsilon_{22}} \operatorname{tg} \omega h \sqrt{\frac{\rho}{c_{66}}}$$

cette résolution d'un modèle unidimensionnel est identique à celle d'une plaque infinie dans les directions x et z pour laquelle on négligerait u_2 et u_3 et $u_{1,3}$, elle donne néanmoins de bons résultats dès que la plaque de quartz a des dimensions grandes devant son épaisseur.

Nous remarquons donc par ce calcul que les fréquences de résonance, d'une pastille de quartz de coupe AT vibrant en cisaillement d'épaisseur, sont directement liées à son épaisseur dès lors que l'on s'affranchit des bords. Ce type de résonateur, plan-plan, possède donc, en théorie, une seule résonance par harmonique - (nous précisons cette notion page 43 à propos des quartz plan-convexes).

En réalité il est impossible de réaliser un tel résonateur, à cela deux raisons :

- difficulté d'obtenir une bonne planéité et un bon parallélisme des deux faces ;
- difficulté due au dépôt des électrodes, nécessairement limité dans l'espace et même à l'influence du champ électrique limité par la dimension des électrodes.

C'est pour cette raison qu'il a été nécessaire de chercher des résolutions tenant compte de ces réalités physiques.

R.D. MINDLIN [13-14-15] a proposé d'autres solutions tenant compte des bords des pastilles rectangulaires et a par ce biais étudié des équations de propagation ne se limitant plus au seul déplacement u_1 mais y ajoutant le déplacement u_2 . Ces travaux ont permis une bonne compréhension des phénomènes de dispersion des ondes dans les plaques de quartz, notamment pour l'application aux problèmes de flexion.

C - RÉSONATEURS PLAN-CONVEXES OU BICONVEXES :

Nous savons depuis longtemps que les vibrations des plaques de quartz peuvent être localisées au centre de celles-ci par un dépôt métallique ou par la réalisation de pastilles plan-convexes ou bi-convexes.

Ces résonateurs dits "à énergie piégée" et notamment les résonateurs plan-convexes qui intéressent notre étude possèdent plusieurs modes de résonance voisins du mode^{de} pur cisaillement d'épaisseur vu précédemment. Ces modes sont répertoriés suivant leur configuration géométrique et à l'aide de trois nombres $n, m, p...$

n représente le nombre de noeuds dans l'épaisseur (suivant y'), nous conviendrons d'appeler "partiel" l'ensemble des résonances ayant la même valeur d'indice n , et nous appellerons "modes" les différentes résonances appartenant au même "partiel" ces modes sont caractérisés par les nombres m et p , ces nombres m et p étant le nombre de noeuds dans les directions x et z' de la plaque ; ainsi le mode 2-4 du partiel 7 est noté (7.2.4.).

Partant de l'équation de propagation proposée par Mc. Skimin en 1944 [8]:

$$c_{11} u_{1,11} + c_{55} u_{1,33} + c_{66} u_{1,22} = \rho \frac{du_1^2}{dt^2}$$

obtenue en négligeant c_{56} d'une part, et les déplacements u_2 et u_3 d'autre part, dans un cas purement mécanique,

C.J. Wilson [7] proposa en 1974 une approche analytique du problème, en proposant pour solution :

$$u_1 = A(x, z) \sin ky \sin \omega t$$

il faut remarquer que l'épaisseur de la plaque plan-convexe varie avec x et z :

$$(2h_0 - 2h)(2R - 2(h_0 - h)) = x^2 + z^2$$

où $2h_0$ est l'épaisseur maximum de la pastille.

Une approximation au 1^o ordre de l'expression de h conduit au nombre d'onde k :

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{2h_0}\right)^2 \left(1 + \frac{x^2 + z^2}{2h_0 R}\right)$$

qui, introduit dans l'équation de propagation donne :

$$c_{11} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c_{55} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \left[\rho \omega^2 - c_{66} \left(\frac{n\pi}{2h_0} \right)^2 \left(1 + \frac{x^2 + z^2}{2h_0 R} \right) \right] A = 0$$

en remplaçant : $\rho \omega^2 - c_{66} \left(\frac{n\pi}{2h_0} \right)^2$ par $\rho (\Omega_1^2 + \Omega_5^2)$ et en séparant les variables dans $A(x,z) = F(x) G(z)$, il obtient :

$$\begin{aligned} \frac{c_{11}}{\rho} \frac{d^2 F}{dx^2} + \left[(\Omega_1^2 - \frac{c_{66}}{\rho} \frac{n^2 \pi^2}{8h_0^3} \frac{x^2}{R}) F(x) \right] G(z) \\ + \frac{c_{55}}{\rho} \frac{d^2 G}{dz^2} + \left[(\Omega_5^2 - \frac{c_{66}}{\rho} \frac{n^2 \pi^2}{8h_0^3} \frac{z^2}{R}) G(z) \right] F(x) = 0 \end{aligned}$$

avec la condition :

$$\Omega_1^2 + \Omega_5^2 = \omega^2 - \frac{c_{66}}{\rho} \frac{n^2 \pi^2}{4h_0^2}$$

Ce système est caractéristique et permet d'extraire deux équations d'Hermite dont les solutions sont du type :

$$\begin{aligned} F(x) &= H_m(x/a_1) \exp. (-x^2/2a_1^2) \\ a_1^4 &= \frac{R(2h_0)^3}{n^2 \pi^2} \frac{c_{11}}{c_{66}} \quad \text{et} \quad \Omega_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho a_1^2} (2m + 1) \end{aligned}$$

et de même :

$$G(z) = H_p(z/a_5) \exp. (-z^2/2a_5^2)$$

avec

$$a_5^4 = \frac{8 R h_0^3}{n^2 \pi^2} \frac{c_{55}}{c_{66}} \quad \text{et} \quad \Omega_5^2 = \frac{c_{55}}{\rho a_5^2} (2p + 1)$$

l'équation au fréquence est :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{c_{66}}{\rho} \frac{n^2 \pi^2}{(2h_0)^2} + \frac{c_{11}}{\rho} (2m + 1) \frac{n\pi}{(8R h_0^3)^{1/2}} \left(\frac{c_{66}}{c_{11}} \right)^{1/2} + \frac{c_{55}}{\rho} (2p + 1) \\ &\quad \frac{n\pi}{(8R h_0^3)^{1/2}} \left(\frac{c_{66}}{c_{55}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

En 1977, H.F. Tiersten reprend cette idée mais à partir d'une équation de propagation beaucoup plus élaborée et dans le cas piézoélectrique [4.5]

Il néglige les coefficients c_{14}, c_{24}, c_{56} qui sont les plus petits (voir annexe - coefficients de la coupe AT).

Il élimine aussi le déplacement u_3 .

Il supprime le terme c_{44} qui a peu d'influence comme le montre Bernard Dulmet dans sa thèse [20].

Et il arrive à une équation de dispersion relative au déplacement u_1 mais ayant tenu-compte de u_2 et de plus de coefficients que celle de Mac Skimin

$$M_n \xi^2 + c_{55} v^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} \hat{c}_{66} - \rho \omega^2 = 0$$

avec

$$M_n = c_{11} + c_{12} + c_{66}r + 4 \frac{(r \bar{c}_{66} - c_{66})(c_{22}r + c_{12}) \cotg K_n \frac{\pi}{2}}{c_{12} n \pi k}$$

$$\hat{c}_{66} = \bar{c}_{66} \left(1 - \frac{8k_{26}^2}{n^2 \pi^2} - 2 \hat{R} \right)$$

$$k_{26}^2 = \frac{e_{26}^2}{c_{66} \epsilon_{22}} \quad \hat{R} = \frac{2\rho' h'}{\rho h}$$

$$r = \frac{c_{12} + c_{66}}{\bar{c}_{66} - c_{22}}$$

ρ' et h' sont relatifs à la métallisation

ρ et h sont relatifs au quartz.

Nous remarquons que cette équation est très proche de l'équation de propagation vue précédemment avec l'étude de C.J. Wilson [7]. H.F. Tiersten y effectue les mêmes transformations pour obtenir l'équation :

$$M_n \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial x_1^2} + c_{55} \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial x_3^2} - \frac{n^2 \pi^2}{4 h_o^2} \hat{c}_{66} \left[1 + \frac{x_1^2 + x_3^2}{2R h_o} \right] \hat{u}_1 - \rho \hat{u}_1 = \rho \omega^2 \frac{e_{26}}{c_{66} 2h} v x_2 e^{j\omega t}$$

$$2h = 2h_o \left(1 - \frac{x_1^2 + x_3^2}{4R h_o} \right) \text{ développement au 1er ordre de la calotte sphérique.}$$

En posant : $\hat{u} = F(x) G(z)$ dans l'équation homogène

$$F'' + (\gamma^2 - \alpha n^2 x_1^2) F = 0 \text{ et } G'' + (\omega^2 - \beta n \alpha_3^2) h = 0$$

et

$$\rho \omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 h_o^2} \hat{c}_{66} = M_n v^2 + c_{55} \mu^2.$$

On reconnaît le système type d'Hermite admettant des solutions voisines de celles vues précédemment :

$$\text{avec } \omega_{\text{nmp}} = \frac{n^2 \pi^2}{4h_o^2} c_{66} \left[1 + \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2h_o}{R}} \left\{ \sqrt{\frac{M_n}{c_{66}}} (2m+1) + \sqrt{\frac{c_{55}}{c_{66}}} (2p+1) \right\} \right]$$

Dans le cas qui nous intéresse, résonateurs à "énergie piégée", la zone de vibration est localisée essentiellement au centre de la pastille, dont les bords sont alors sans influence sur la vibration. C'est la raison pour laquelle C.J. Wilson et H.F. Tiersten ne se préoccupent pas des conditions aux limites sur ces bords (conditions par ailleurs très compliquées dans le cas de pastilles de quartz).

Les bords n'étant pas pris en compte, nous voyons dans l'exemple de la plaque plane-infinie que les conditions de résonance ne sont fixées que par l'épaisseur de la plaque, soit dans ce cas une seule fréquence de résonance par partiel possible :

$$\eta h_o = \frac{e_{26}^2}{c_{66} \epsilon_{22}} \operatorname{tg} \eta h_o$$

ce qui donne approximativement :

$$\omega_o = \frac{n\pi}{2h_o} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \quad n \text{ impair} \quad \text{à cause de l'épaisseur constante.}$$

Dans le cas de la plaque plane convexe l'épaisseur décroît du centre vers le bord de h_o à :

$$h = \sqrt{R^2 - d^2} - R + h_o$$

où d est la distance d'un point de la pastille au centre de symétrie et R le rayon de convexité, la plage de fréquences de résonance possible (dans le cas de vibration piégée) est donc :

$$F = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$$

ou sinon, appelons F_{noo} la fréquence du partiel n pour la hauteur h_o :

$$F = F_{\text{noo}} \frac{h_o}{\sqrt{R^2 - d^2} + h_o - R} \quad F_{\text{noo}} = \frac{n}{4h_o} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$$

Pour les quartz que nous avons étudiés et dont les caractéristiques sont :

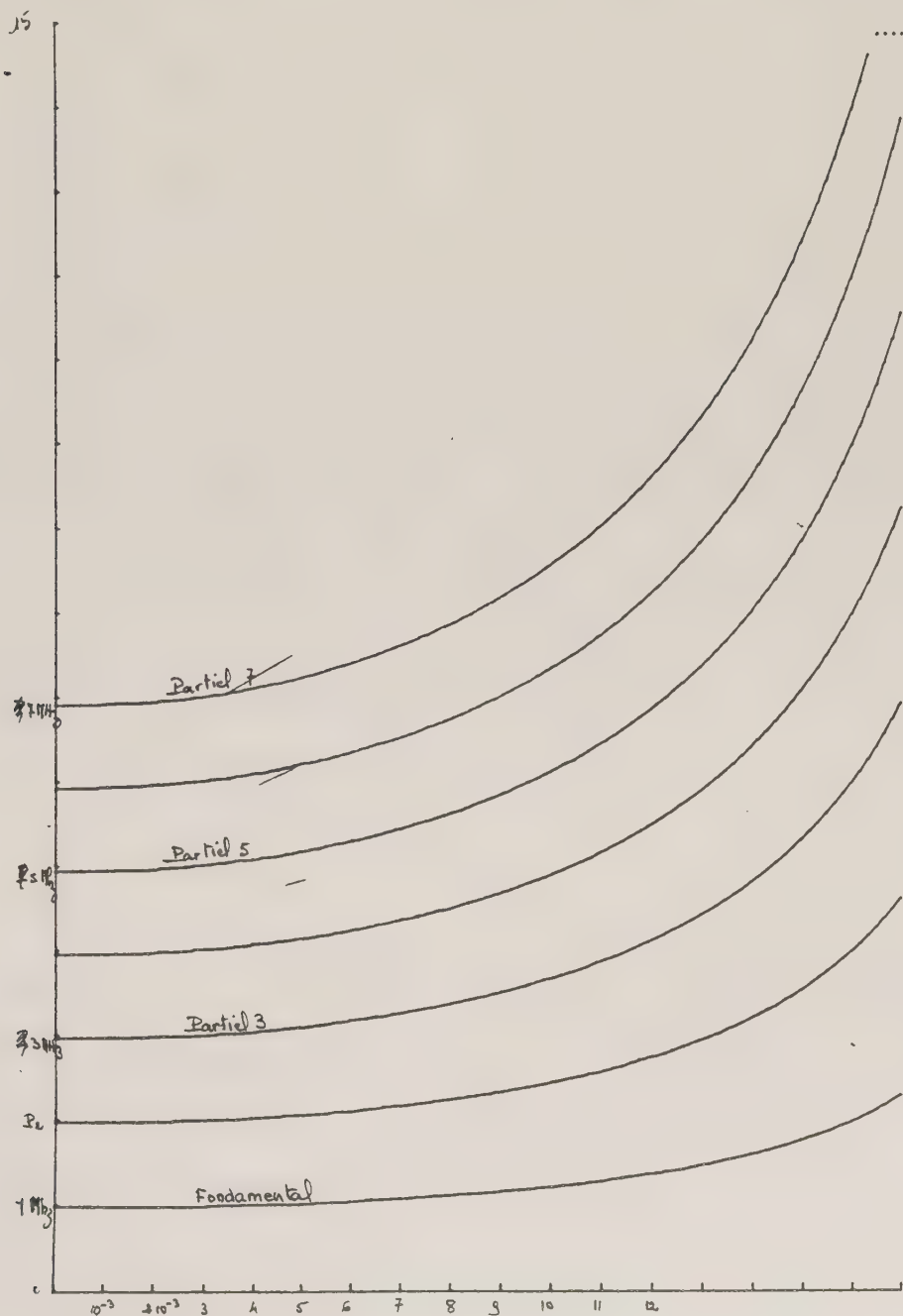
diamètre de la partie active : ϕ	= 15 mm
rayon de convexité	: R = 150 mm
épaisseur maximum	: $2h_o$ = 1.68 mm

La plage de résonance sera sur les différents partiels :

Fondamental	1,042 MHz	à	1,173 MHz
P ₃	3,018 MHz	à	3,397 MHz
P ₅	5,000 MHz	à	5,629 MHz
P ₇	6,977 MHz	à	7,855 MHz

Nous pouvons tracer les courbes suivantes donnant les fréquences possibles de cisaillement d'épaisseur sur les différents partiels en fonction de d, distance au centre de symétrie de la pastille.

Figure 2



C'est cette hypothèse qui mène C.J. Wilson au développement théorique que nous avons vu.

Nous devons donc retenir que l'existence des solutions est liée au piégeage de la vibration : celle-ci doit être nulle sur les bords du résonateur.

D'autre part, parmi l'ensemble des solutions en polynôme d'Hermite, donné par le calcul, et dont la forme est :

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = y$$

$$H_2 = 1 - 2y^2$$

$$H_3 = y - \frac{2}{3} y^3$$

$$H_4 = 1 - 4y^2 + \frac{4}{3} y^4$$

Tiersten ne conserve que celles à indices m et p pairs qui sont les seules à satisfaire la symétrie du modèle choisi .

Nous avons exposé différentes approches du problème des résonateurs à quartz à cisaillement d'épaisseur. Cet ensemble de propositions et de résultats précis (fréquence piégeage, configuration spatiale des modes) donne matière à des vérifications expérimentales.

Le Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité possède toute l'instrumentation pour réaliser ces vérifications dans les conditions les meilleures, sur les résonateurs haute-fréquences de grande précision.

Ce travail fait l'objet de la suite de notre rapport.

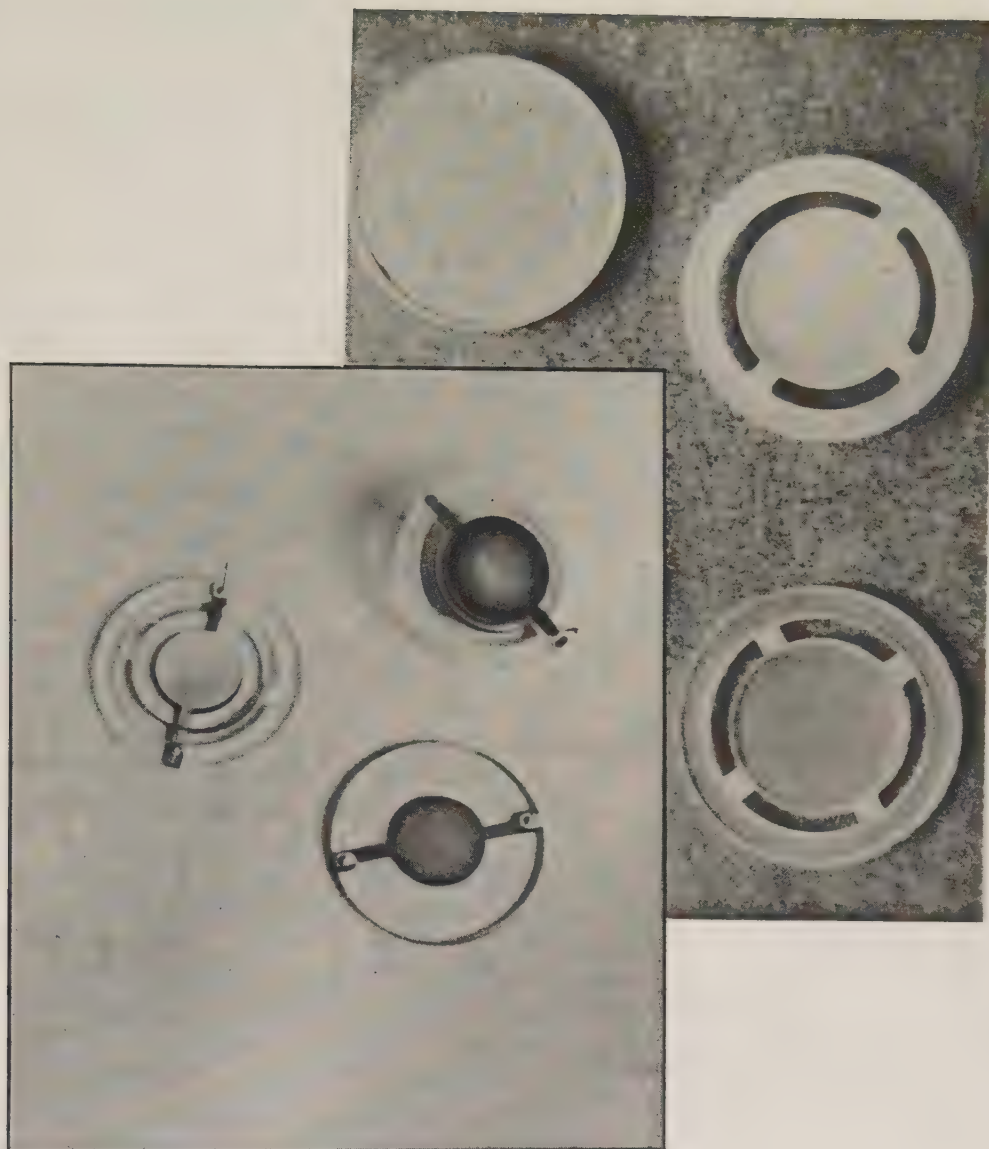
CHAPITRE II

ETUDE EXPERIMENTALE

Deux types d'étude ont été réalisés sur les résonateurs à quartz :

- 1/ Etude de la réponse électrique en fonctionnement passif (filtre)
- 2/ Etude de la configuration géométrique des modes de vibration par topographie aux rayons X.

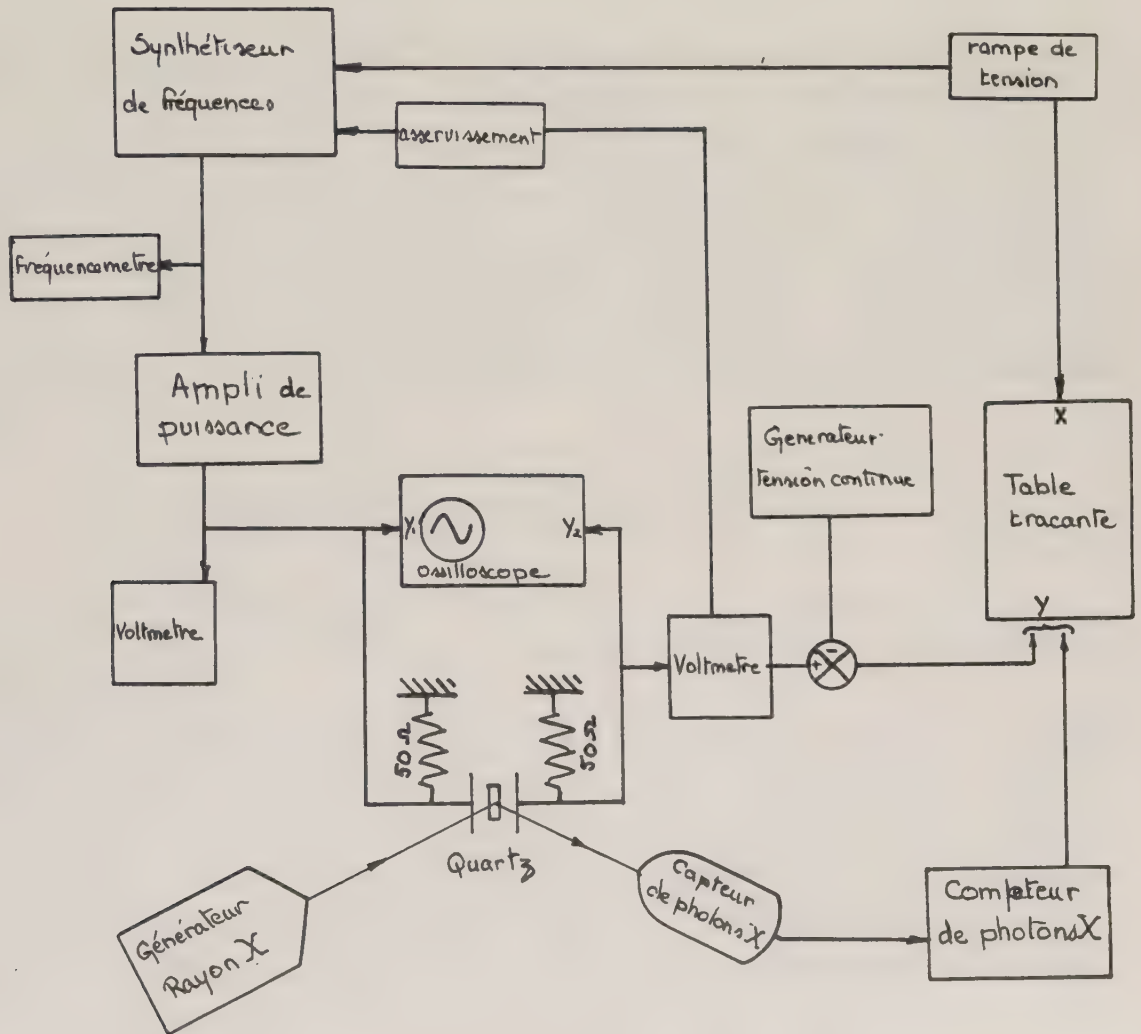
Nous avons effectué ces études expérimentales principalement sur des quartz constitués d'une lentille plan convexe de coupe AT, dont la partie active a un diamètre de 15 mm (figure 2) et dont le rayon de courbure est de 150 mm. Certains de ces résonateurs possèdent une suspension du type B.V.A.. Pour la commodité des expériences, le résonateur a été métallisé (comme nous le voyons ci-dessous) par un dépôt d'or sur chrome d'environ 2000 Å.



Ce résonateur, de type particulier, (réalisé au Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité de l'E.N.S.M.M.) a fait l'objet de nombreux travaux et notamment nous avons un tableau de toutes les fréquences de résonances (annexe **III**) calculées à partir des résultats de H.F. Tiersten jusqu'à un ordre très élevé.

A - DÉTECTION DES RÉSONANCES :

Pour étudier la réponse du quartz en fréquence nous avons réalisé le montage suivant :



Une rampe délivrant une tension de 0 à 100 mv, en un temps variable de 1 minute à 99 heures, commande le synthétiseur. Le balayage en fréquence peut-être de 10 Hz, 100 Hz, 1 KHz, 10 KHz, 100 KHz ou 1 MHz.

Le signal du synthétiseur est amplifié (jusqu'à 10 V sans distinction) par un amplificateur large bande 500KHz à 200 MHz et attaque le quartz par l'intermédiaire d'un montage en pont.

1/ - Courbe amplitude - fréquence électrique :

Un voltmètre délivre une tension continue proportionnelle au signal filtré par le résonateur, nous pouvons ainsi enregistrer sur une table traçante les variations du courant traversant le quartz. Pour augmenter la précision nous retranchons au signal de sortie du voltmètre une valeur continue représentant le courant que laisse passer le quartz en dehors des résonances (ce courant est celui qui traverse la capacité C_0 du quartz) ; nous n'enregistrons alors que les variations par rapport à ce niveau (ce qui nous permet une très grande finesse d'analyse). Nous appelons un tel enregistrement "spectre électrique".

2/ - Courbe amplitude - fréquence mécanique :

Le "spectre électrique" peut-être doublé d'un "spectre mécanique" que nous appelons ainsi parce qu'il met en évidence, de façon directe, les vibrations du résonateur.

Le résonateur est placé dans le faisceau X en incidence de Bragg (voir paragraphe suivant). Le détecteur de photons X, par l'intermédiaire du compteur C.G.R., nous délivre une tension proportionnelle à l'intensité X, diffractée par le quartz, nous effectuons un balayage en fréquence et nous enregistrons l'intensité diffractée. Nous voyons, figure 3, la comparaison entre l'enregistrement d'une résonance "électrique" et de la même résonance enregistrée par l'intermédiaire du rayonnement X diffracté par le quartz.

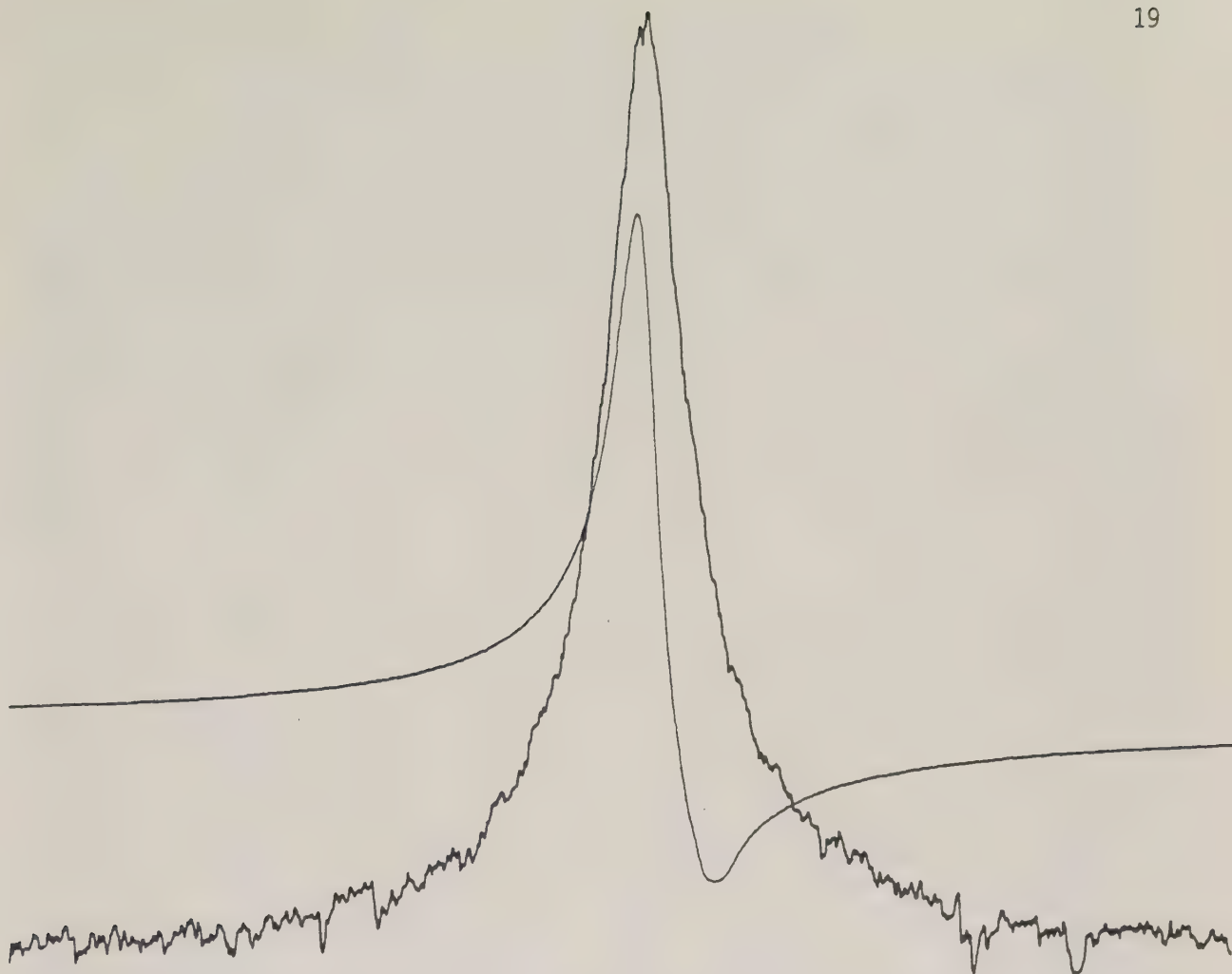


Figure 3

Le tracé du "spectre électrique" est enregistré à raison de 1 MHz en 1 heure. Dans le cas des spectres mécaniques, il est nécessaire que l'amplitude de vibration du résonateur soit suffisamment importante pour avoir une augmentation de l'intensité X , pour cette raison le balayage en fréquence se fera 2 à 3 fois plus lentement. Figure 4, nous avons la comparaison entre les deux sortes d'enregistrement pour la même plage de fréquence d'un résonateur 5 MHz - Partie 5.

Nous pouvons cependant noter que ces enregistrements mécaniques se sont faits avec un faisceau X d'une largeur de quelques dixièmes de millimètres en incidence au centre du résonateur, ils ne prennent donc en compte que les vibrations se produisant aussi au centre.

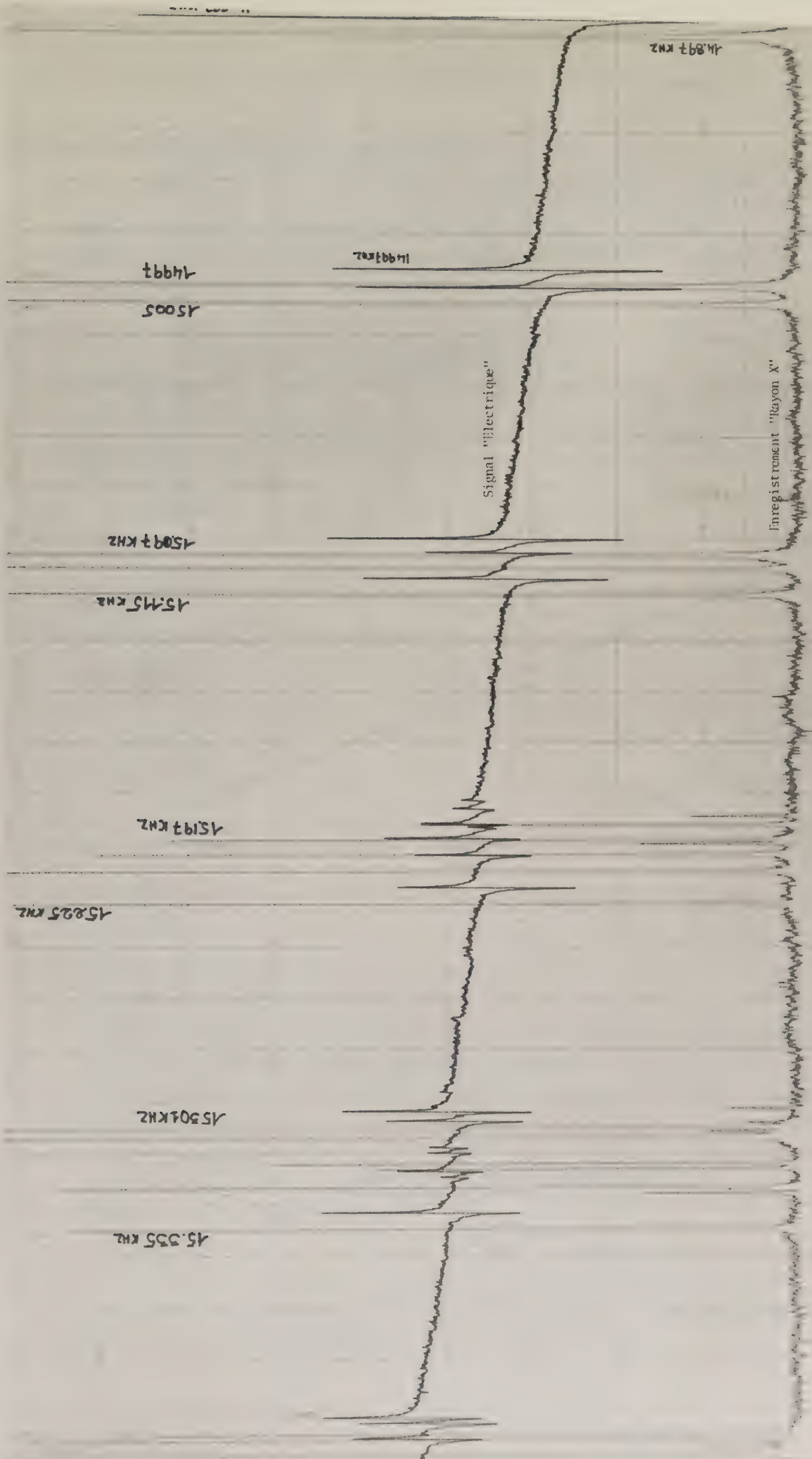


Figure 4 : Spectre "Mécanique et électrique" du partiel 15 d'un résonateur à quartz 5 MHz P5 -

B - DIFFRACTION DES RAYONS X : TOPOGRAPHIE :

Le Dr Andrew Lang découvrit en 1958 une méthode pour visualiser sur une plaque photo à l'aide du rayonnement X les défauts de construction des cristaux, méthode basée sur les lois de Bragg, ou lois de réflexion des rayons X sur les plans réticulaires.

1 - Cristallographie et diffraction X :

Si un faisceau de rayon X de longueur d'onde λ vient frapper un plan réticulaire d'indices h, k, l sous son incidence de Bragg θ_B [21], une partie est réfléchié suivant l'angle $2\theta_B$ comme nous le voyons sur la figure 5

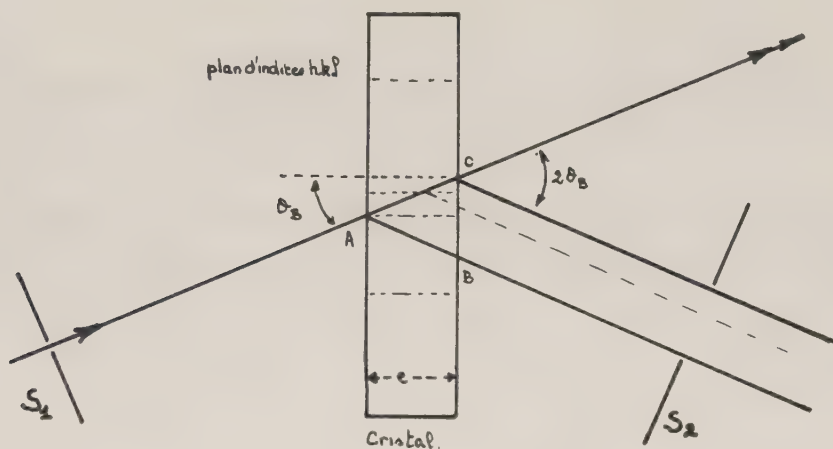


Figure 5

on a $2d \sin \theta_B = k\lambda$

ou λ est la longueur l'onde du faisceau X

k définit l'ordre de la réflexion ($k = 1, 2, 3, \dots, n$)

et d est la distance inter-réticulaire que l'on calcule à partir des indices h, k, l de Miller Bravais du réseau cristallin.

$$d_{hkl} = \frac{a_0}{\sqrt{\frac{4}{3}(h^2 + hk + k^2) + \frac{1^2}{(c/a_0)^2}}} \quad \text{pour le quartz}$$

c et a_0 étant les distances inter-atomique du quartz (c dans la direction $\vec{d}$ et a_0 dans la direction $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).

Nous obtenons sur la plaque photo l'image de la tranche AC ou plus exactement, l'image émise dans la direction 2θ et à travers le triangle ABC (triangle de Bormann) par le rayon incident AC (29).

Toute perturbation dans la propagation du faisceau et, donc, toute perturbation qui pourrait être due à des défauts d'organisation des plans réticulaires sera sanctionnée sur la plaque photographique par une variation de contraste.

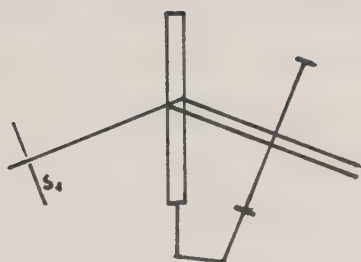
2/ - Topographie :

a) - Technique -

Nous pouvons par la méthode de Lang réaliser deux sortes de topographie.

La topographie de section (figure 6a) où le cristal et la plaque photo sont fixes par rapport au faisceau X.

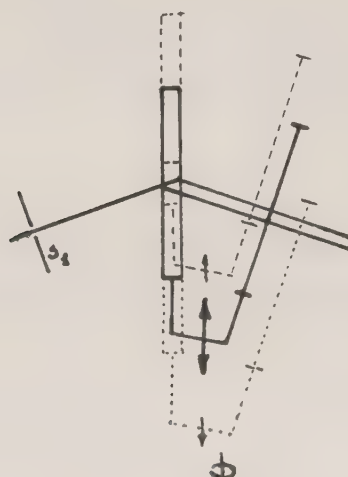
La topographie de projection (figure 6b) où le cristal solidaire de la plaque photo se déplace devant le rayonnement X et qui est l'intégration sur la plaque photo des différentes sections.



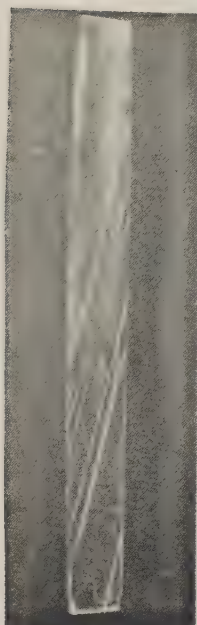
a

Figure 6

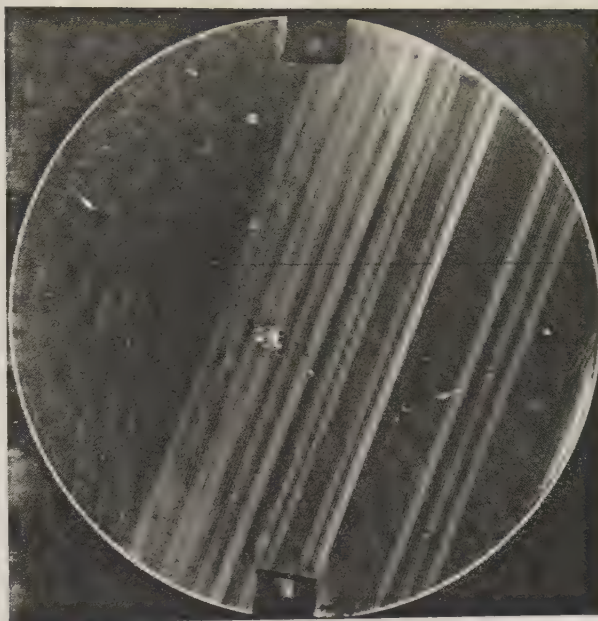
Topographie de Section



Topographie de Projection



a, Topographie de Section



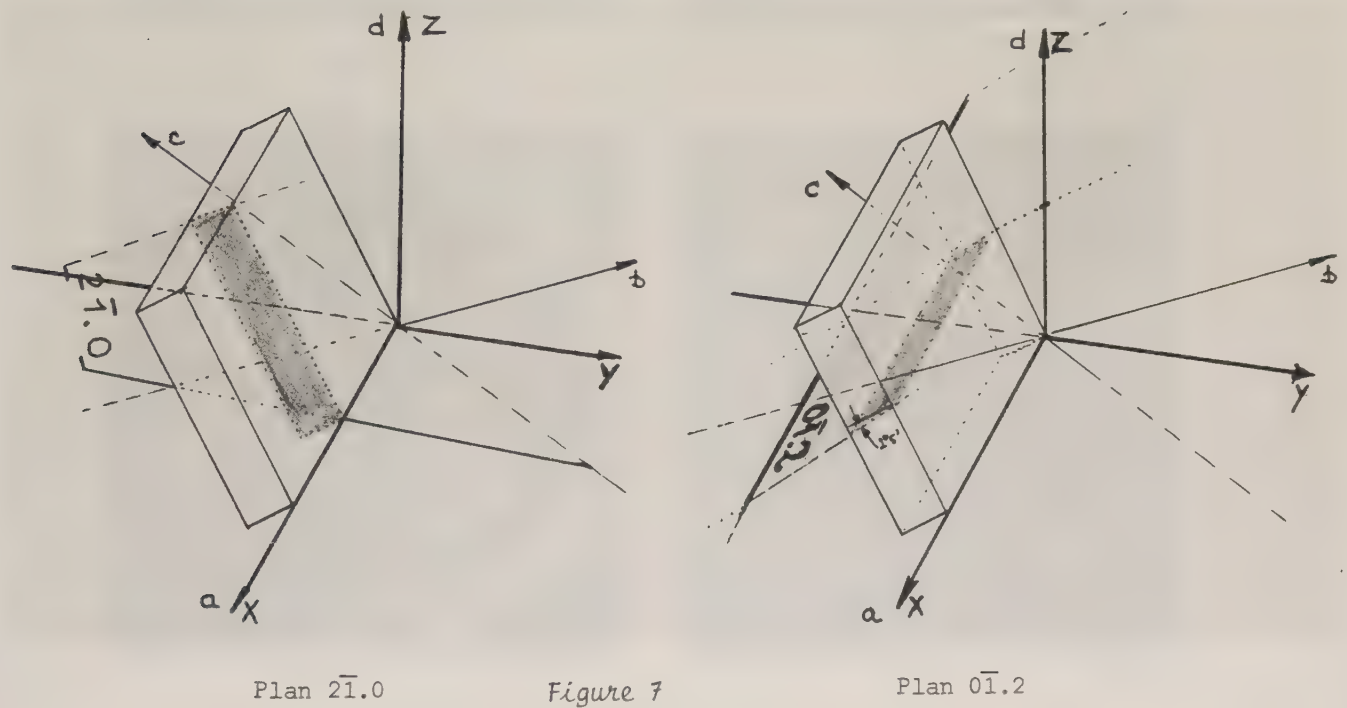
b, Topographie de Projection

Nous voyons sur ces topographies de cristaux de quartz, l'image obtenue par chacune de ces méthodes. Nous voyons la représentation de quelques défauts, telsque les bandes de croissance et les lignes de dislocation générées par des impuretés pendant la croissance.

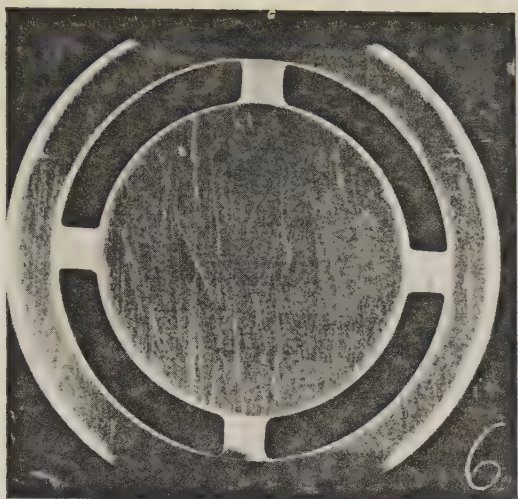
- Choix des plans de réflexion -

Chaque plan réticulaire peut permettre la réalisation de topographies, cependant, il est nécessaire de choisir convenablement ces plans, compte-tenu de l'étude que l'on veut faire.

En effet, si nous effectuons deux topographies de projection sur deux plans différents, par exemple, les plans $2\bar{1}.0$ et $0\bar{1}.2$ du quartz disposé comme décrit figure 7 :



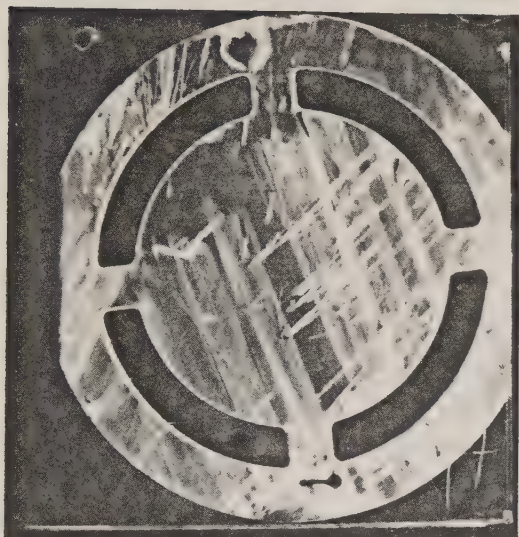
Ces deux plans sont perpendiculaires entre eux et nous donnent les deux topographies suivantes : (quartz sans vibration).



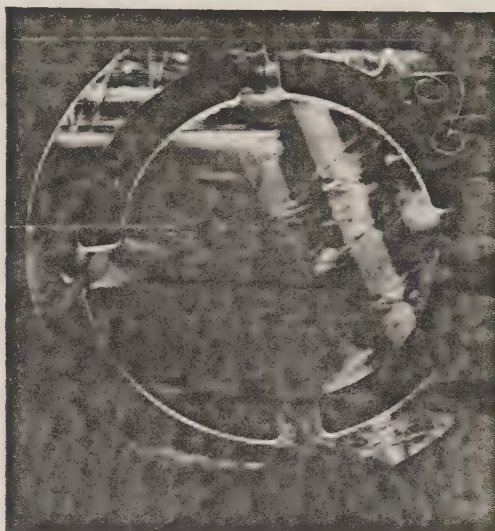
Plan 21.0



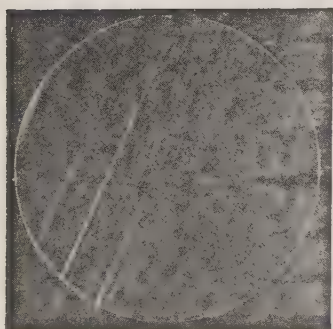
Plan 01.2



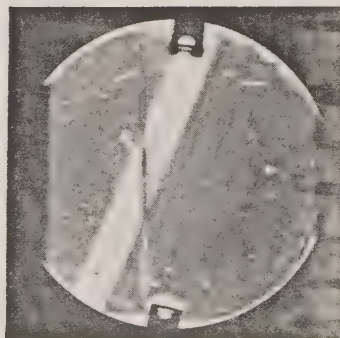
Plan 21.0



Plan 01.2



Plan 21.0



Plan 01.2

Ces deux topographies sont différentes. On montre qu'une dislocation ou une déformation est visible sur une topographie si son vecteur de Burger [21] n'est pas perpendiculaire au vecteur de réflexion du faisceau (vecteur perpendiculaire au plan de réflexion et contenu dans le plan du faisceau incident et réfléchi).

1/ pour étudier les différentes composantes du mouvement u_1 , u_2 , u_3 , il faudra donc choisir des plans réticulaires, tel que le vecteur de réflexion soit perpendiculaire aux deux autres composantes non étudiées.

2/ nous choisirons des plans réticulaires à forte densité d'atomes (à faible indice de Miller-Bravais) afin d'avoir une intensité réfléchie permettant un temps de pose relativement court (le temps de pose moyen d'une topographie de projection est de trois heures) et un angle de Bragg faible, afin d'avoir une épaisseur traversée par le faisceau X la plus faible possible et diminuer ainsi l'absorption.

b) - Utilisation -

Ainsi, dans le cas de la coupe AT, nous utilisons les plans suivants :

$2\bar{1}.0$: pour étudier la composante u_1 , ce plan est parallèle au plan yo_z et perpendiculaire à $\vec{o\bar{x}}$ donc à u_1 . u_1 est parallèle au vecteur de réflexion, on a donc :

$$\theta_{\text{Bragg}} = 8^\circ 20'$$

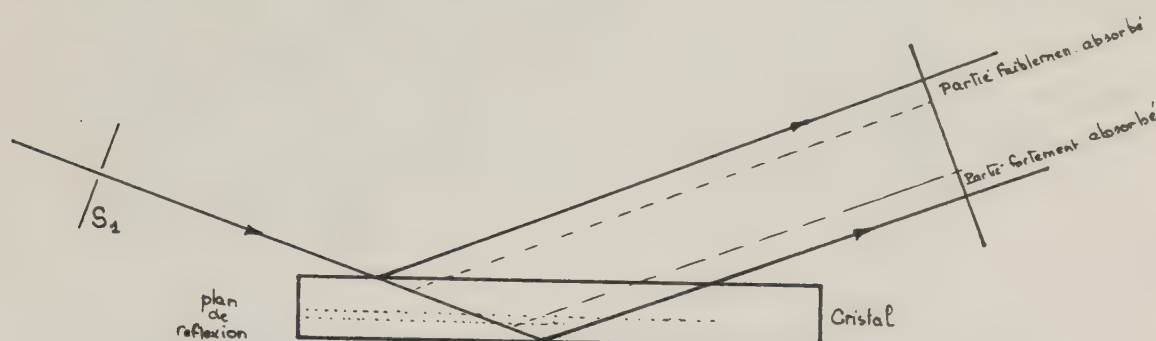
$0\bar{1}.2$: pour étudier la composante u_3 , ce plan fait un angle de $2^\circ 5'$ avec la normale aux faces de la pastille de quartz et est perpendiculaire au plan $2\bar{1}.0$, ce plan est pratiquement parallèle au vecteur u_3 :

$$\theta_{\text{Bragg}} = 8^\circ 57'$$

$0\bar{1}.1$: pour étudier la composante u_2 , ce plan est parallèle à $\vec{o\bar{x}}$ et fait un angle de 4° , environ, avec le plan de la pastille de quartz, il est donc pratiquement perpendiculaire à u_2 :

$$\theta_{\text{Bragg}} = 6^\circ 6' \text{ à l'ordre } 1.$$

Dans ce cas l'étude n'est pas aisée, car comme nous le voyons ci-dessous, le faisceau émergent n'a pas subi une absorption équivalente pour tous



les points de la section et nous ne pouvons pas observer, sur une topographie de section, les deux faces du quartz, la face d'entrée étant alors très suréxposée alors que la face de sortie est sous-exposée.

Nous pouvons pallier ce défaut de deux façons :

- en l'atténuant par une incidence à un ordre beaucoup plus élevé (ordre 7 - $\theta_B \approx 48^\circ$) ce qui diminue la longueur sectionnée par le faisceau, mais diminue l'intensité émise (l'intensité diminue quand l'ordre augmente).
- en interposant un coin absorbant pour que l'intensité soit la même en tous points de la plaque photo, mais là, aussi, l'intensité devient faible, et le temps de pose, qui normalement est déjà, en moyenne de 12 à 18h, devient prohibitif.

3/ - Rayonnement X - et surface photographique :

Le générateur de rayons X à anticathode tournante au Molybdène délivre deux valeurs principales de rayonnement :

- $M_o k_{\alpha 1}$ de longueur d'onde $\lambda = 0,7093 \text{ \AA}$
- $M_o k_{\alpha 2}$ de longueur d'onde $\lambda_2 = 0,7135 \text{ \AA}$

mais d'intensité deux fois plus faible.

Les conditions de réflexion sur les plans réticulaires étant dépendantes de la longueur d'onde, il est nécessaire de séparer les deux rayonnement, d'en éliminer un. Pour cela, il suffit que l'incidence du faisceau X satisfasse les conditions de Bragg pour $K_{\alpha 1}$ sans les satisfaire pour $K_{\alpha 2}$. Pour résoudre ce problème G. Genestier a choisi de placer la table de Lang, donc la fente S_1 à 1m27 environ du foyer ce qui, compte-tenu de la dimension de celui-ci 0,2 x 2 mm, permet de séparer $K_{\alpha 1}$ et $K_{\alpha 2}$ pour des valeurs de la fente S_1 assez fortes.



Nous voyons sur la photo 8 le montage complet, générateur et table de Lang avec un cristal monté sur une tête permettant l'ajustement de la position des plans réticulaires.

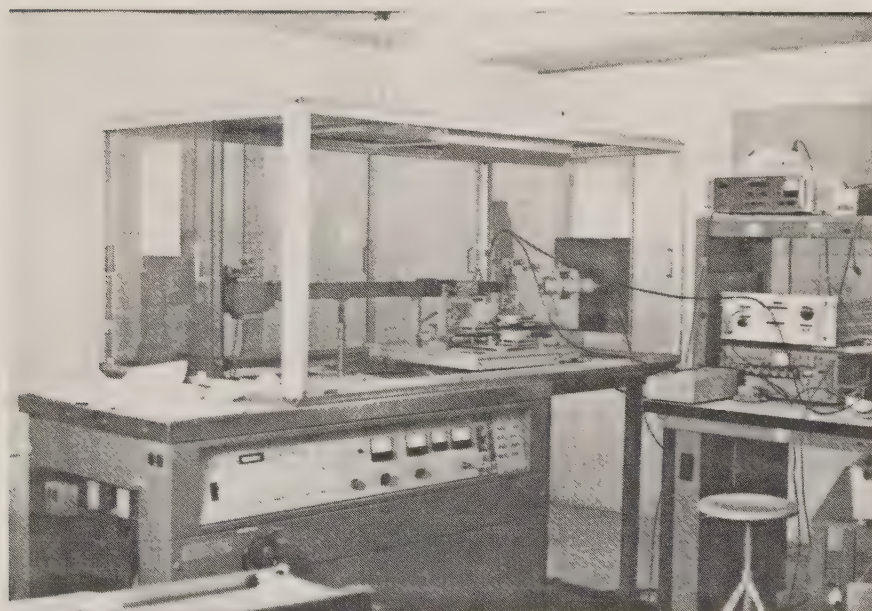


Figure 8

Générateur Rayons X (RIGAKU)

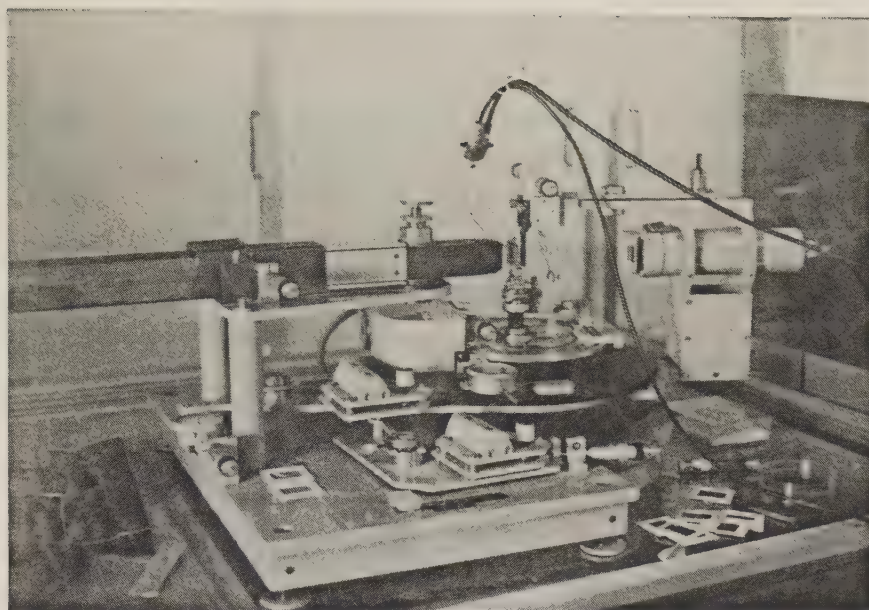


Figure 8

Table de Lang

Les surfaces sensibles employées sont de différents types :

- couche mince sur plaque de verre à haute résolution, de type Ilford Nuclear L4, nécessitant un temps de pose important, ou G5 plus rapide.
- les films photographiques de type Kodak Industrex ou Kodirex, 3 à 4 fois plus rapides mais de résolution inférieure et surtout d'un coût beaucoup moins élevé.

Le choix de ces différentes émulsions est guidé par le type de travail que l'on a à effectuer.

L'Ecole d'Eté de l'Université de Durham (27) présidée par le Dr Lang, nous a permis de parfaire nos connaissances sur les différentes techniques de topographie et leurs interprétations.

4/ - Observations et remarques préalables aux expériences :

Quand on observe l'intensité diffractée par le plan $2\overline{1}.0$ d'un résonateur de coupe AT, on voit que celle-ci est augmentée de façon très sensible par la mise en vibration. Nous voyons sur la figure 9, la variation de l'intensité enregistrée par le compteur CGR entre la valeur obtenue en statique (tension nulle) et celle obtenue par des différentes valeurs de tension aux bornes du quartz

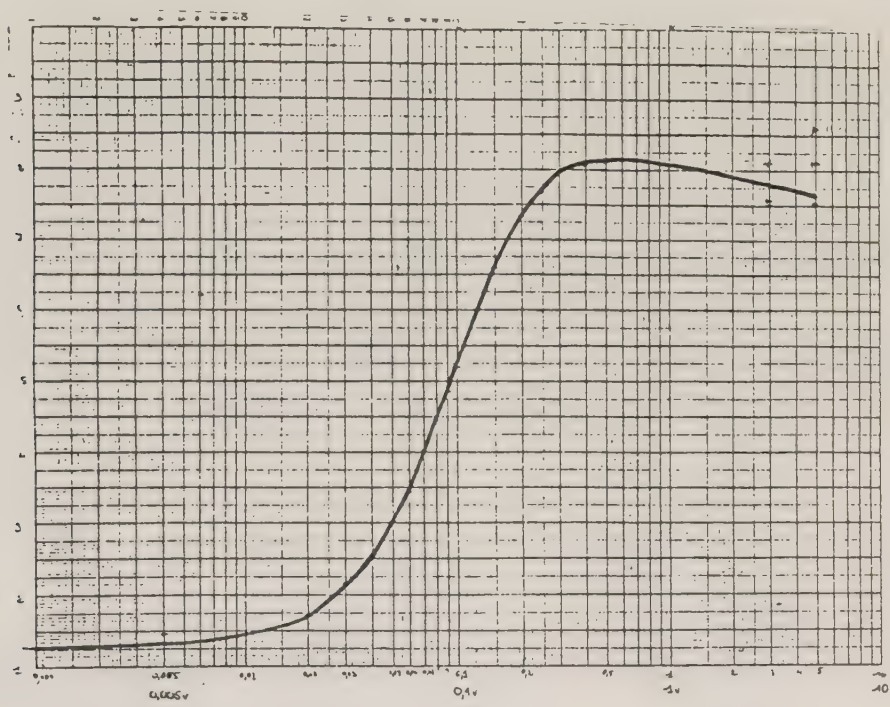


Figure 9 Courbe d'Intensité diffractée en fonction de la tension

Nous avons fait un relevé de l'intensité d'un faisceau de 0,01 mm d'épaisseur, de 5 mm de hauteur, diffractée par les plans $2\overline{1}.0$, au centre d'une pastille de quartz (diamètre 15 mm, rayon de courbure 150 mm) à électrodes déposées (l'épaisseur de la métallisation, chrome, argent, or est d'environ 2000 Å). Ce résonateur est excité sur son partiel 5 à 5 MHz, dans l'air. Le coefficient de qualité est alors de 10^6 .

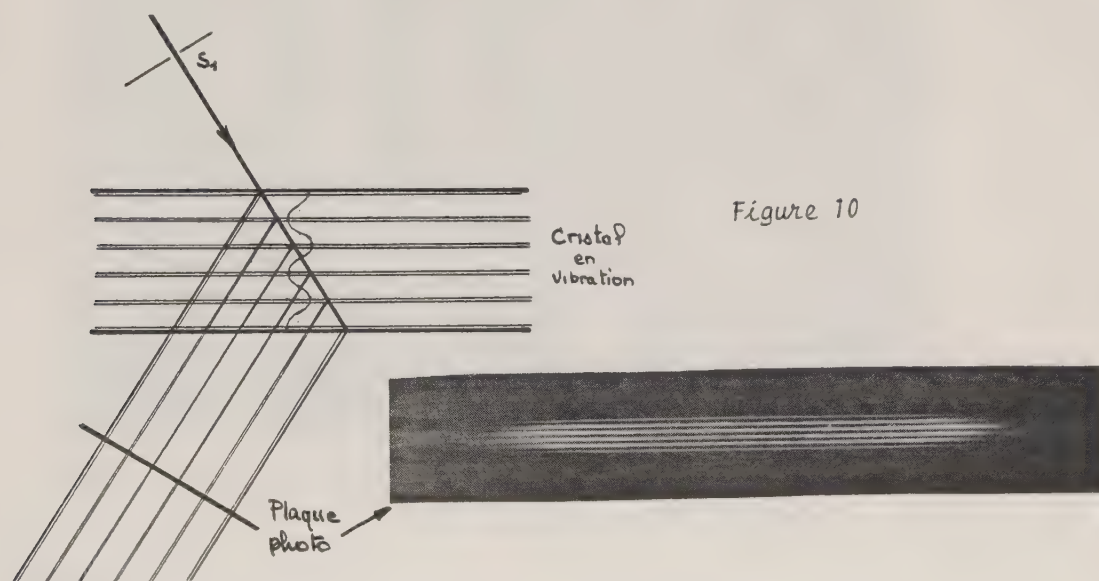
L'ordre de grandeur de l'amplitude sur la face libre d'un quartz a été mesuré par K. Iijima, Y. Tsuzuki, Y. Hirose et M. Akiyama (25) de l'Université de Yokohama par une méthode d'interférométrie pour un quartz de coupe AT, plan convexe (ϕ 22 mm - rayon 95 mm - épaisseur 1,38 mm) vibrant en fondamental à 1,286 MHz à électrodes déposées en or. L'amplitude maximum relevée alors, a été de 330 Å sur un mode à 1,349 MHz et de 260 Å sur le fondamental à 1,286 MHz (cette amplitude étant l'amplitude du mouvement notée u_1).

5/ - Topographie de section de quartz en vibration :

La topographie de section sur les plans $2\bar{1}.0$ d'un quartz à 5 MHz en partiel 5 (figure 10) révèle des franges blanches au nombre de 6, 2 minces sur les bords et 4 plus importantes dans l'épaisseur.

On peut montrer que l'intensité diffractée par une famille de plans réticulaires est liée au gradient de déformation (courbure et compression) de ces plans, ainsi qu'à l'amplitude de cette déformation (30).

D'après Tersten, nous avons dans l'épaisseur du quartz (suivant x_2) une déformation sinusoïdale, qui en partiel 5, a la configuration suivante :



Sur cette figure, les lignes représentent les lieux des points où la déformation est maximale.

Nous voyons donc que les franges de surintensité relevées sur la topographie sanctionnent bien le rang de partiel du mode observé (le nombre de lignes étant égal à $n + 1$, n rang de partiel d'après la théorie de H.F. Tiersten. L'expérience prouve que cela est en accord avec le partiel de vibration comme nous le voyons ci-dessous (figure 11)



Figure 11

Pour visualiser ces franges, il est nécessaire de limiter la largeur du faisceau incident (figure 12) de telle sorte qu'elle soit inférieure à la largeur entre deux franges blanches pour une plus grande netteté d'image,

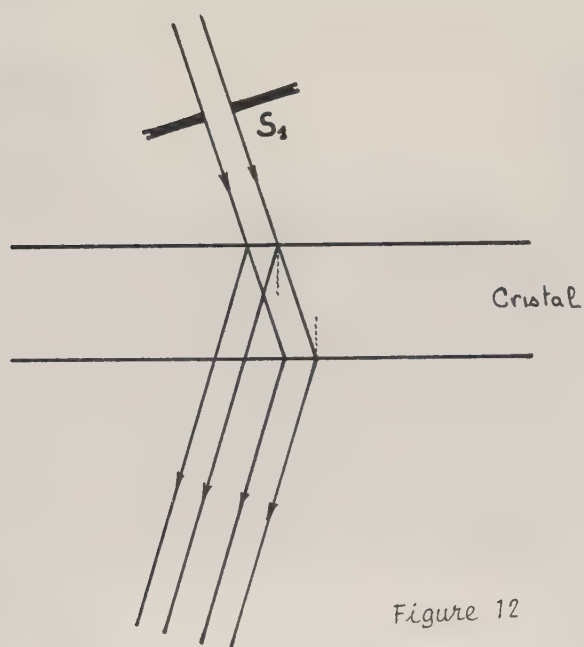


Figure 12

nous réduisons cette largeur au minimum possible permis par le mécanisme, soit environ $5\mu\text{m}$.

C - EXPÉRIENCES ET RÉSULTATS :

Notre premier travail a été d'étudier les spectres de différents résonateurs à quartz de coupe AT. Tous sont plan convexes ou biconvexes, mais différents par leur géométrie ou simplement par la forme de leurs électrodes.

En effet, si la technologie du résonateur à quartz, haute fréquence, a permis de se rendre compte très vite des meilleurs résultats dus aux résonateurs plan-convexes ou biconvexes à énergie piégée, ces résonateurs ont été pourvu d'électrodes de formes très variables (figure 13).

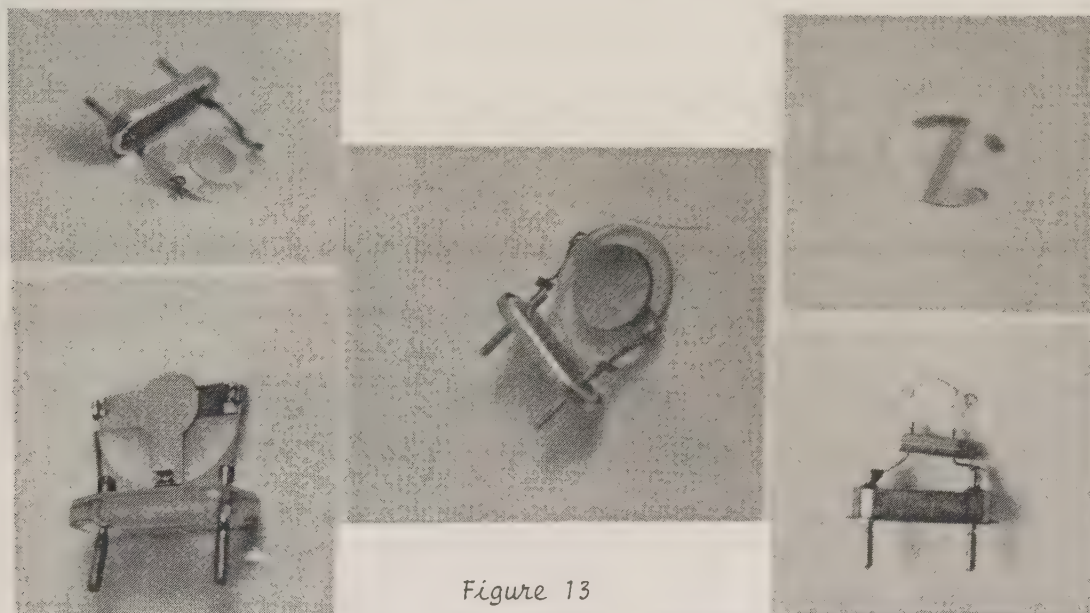
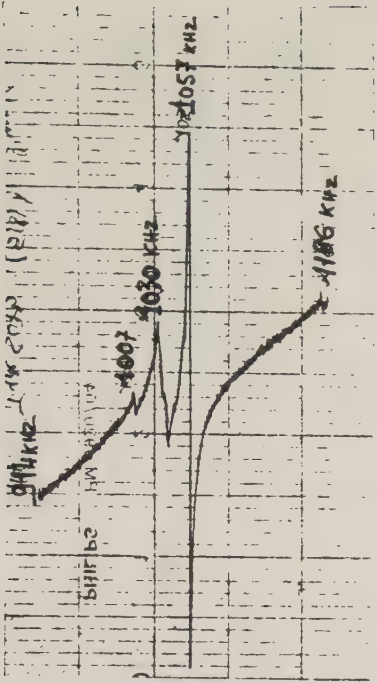


Figure 13

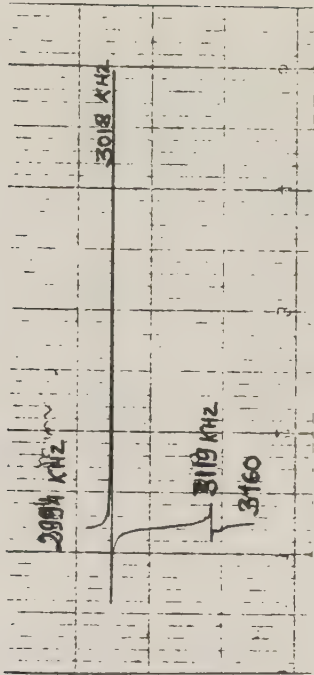
Ces électrodes sont soit déposées sur le quartz, ou, comme les nouveaux résonateurs fabriqués au Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité de l'E.N.S.M.M., maintenues par un condensateur à quelques microns de la surface de la partie active. (Brevet BESSON)

Le tracé des spectres de ces quartz est sensiblement différent et très difficilement interprétable directement. Nous voyons, figure 14, quelques enregistrements pour des résonateurs différents.



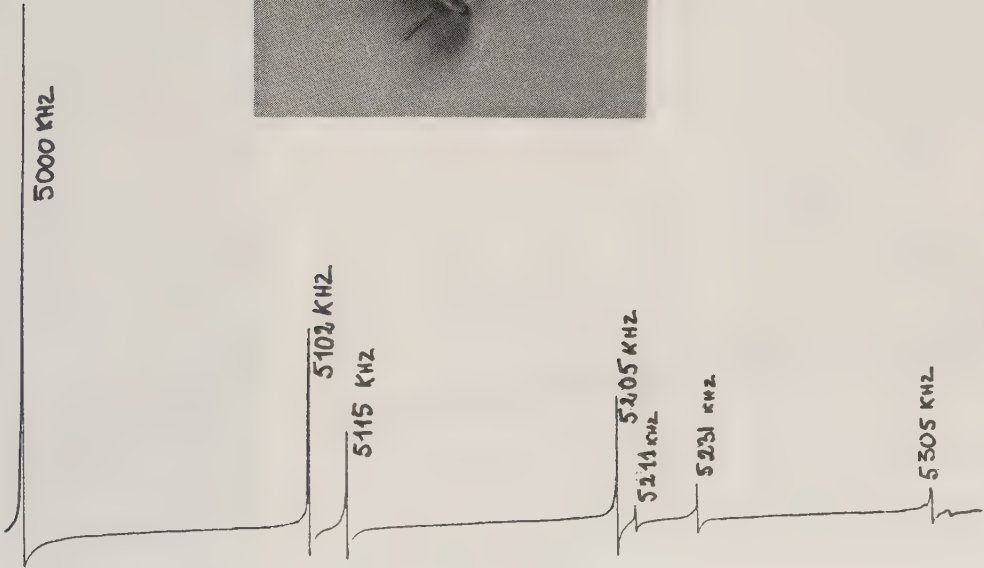
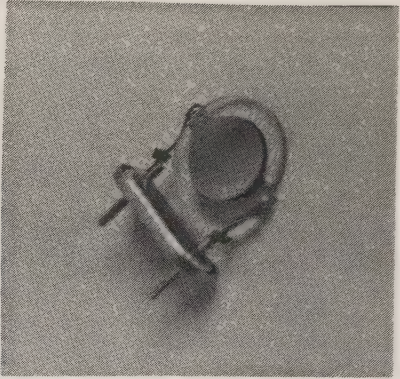
Fondamental

Quartz 5 MHz, P₅

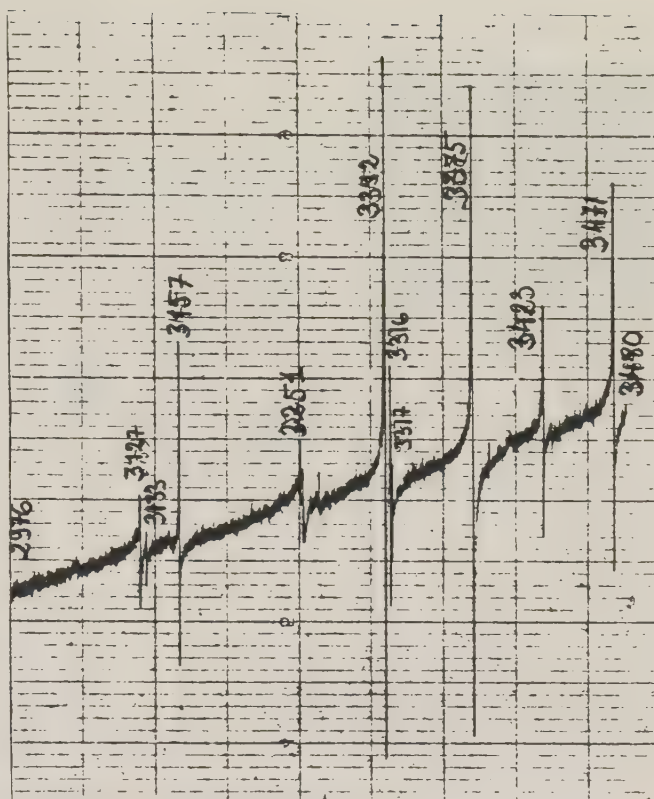
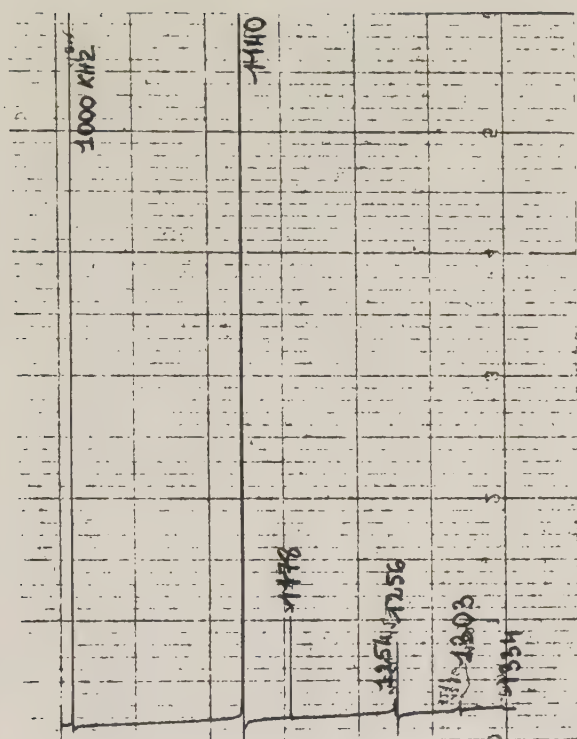


Partiel 3

Figure 14a

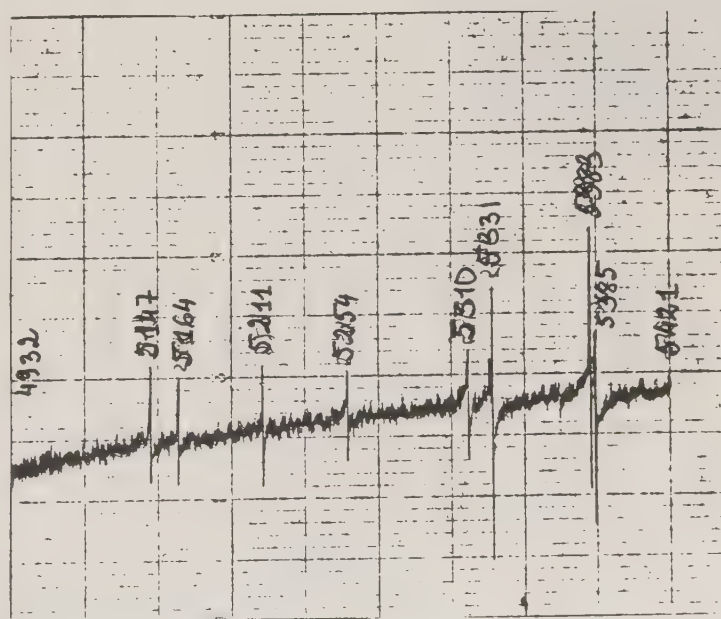
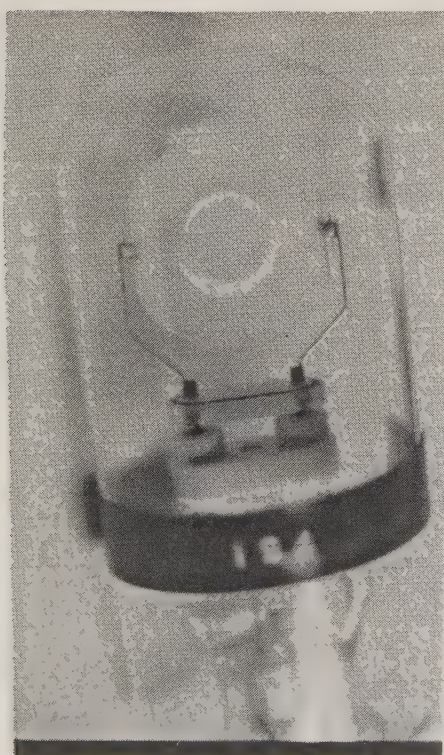


Partiel 5



Quartz 1 MHz fondamental à électrodes annulaires -

Figure 14



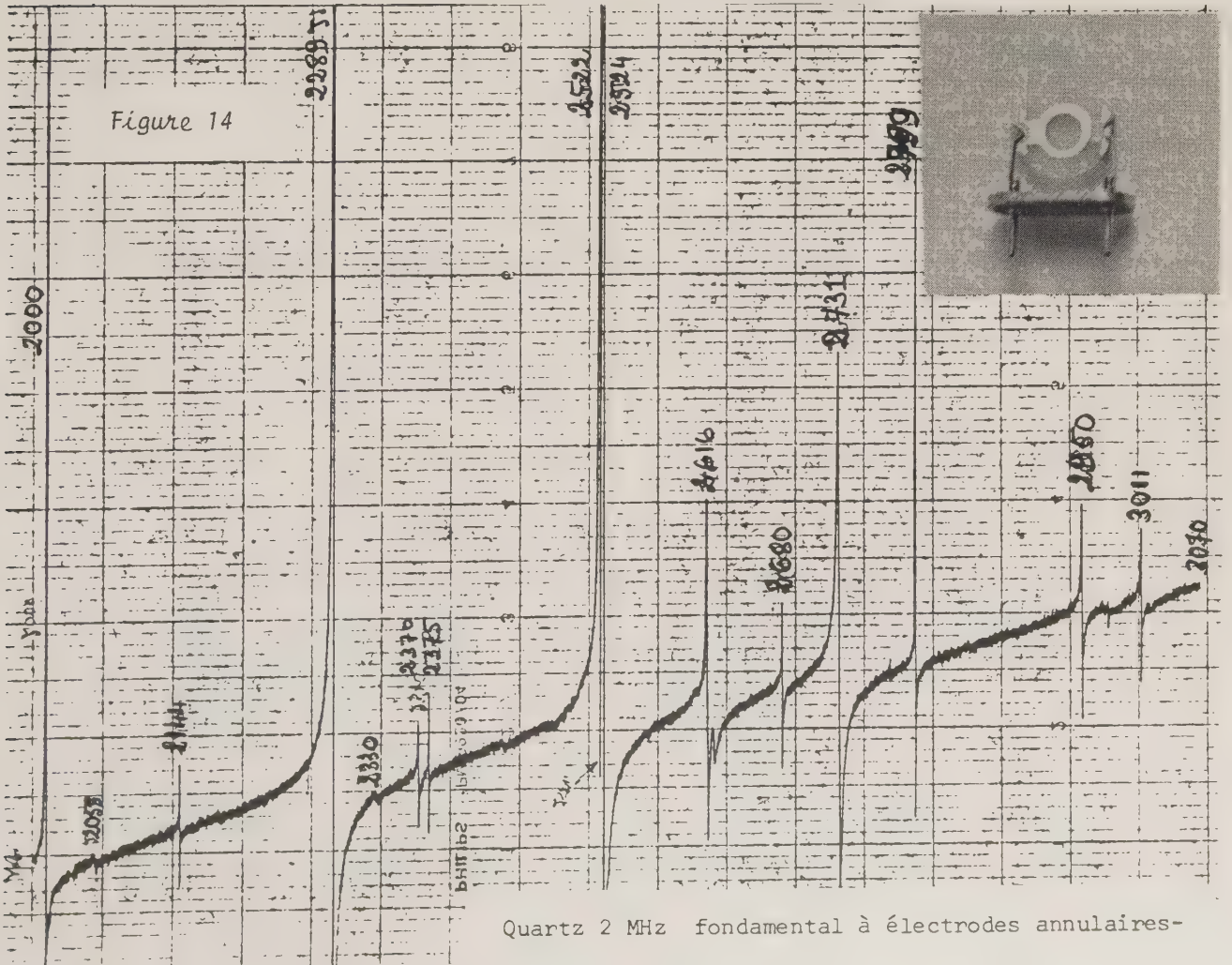
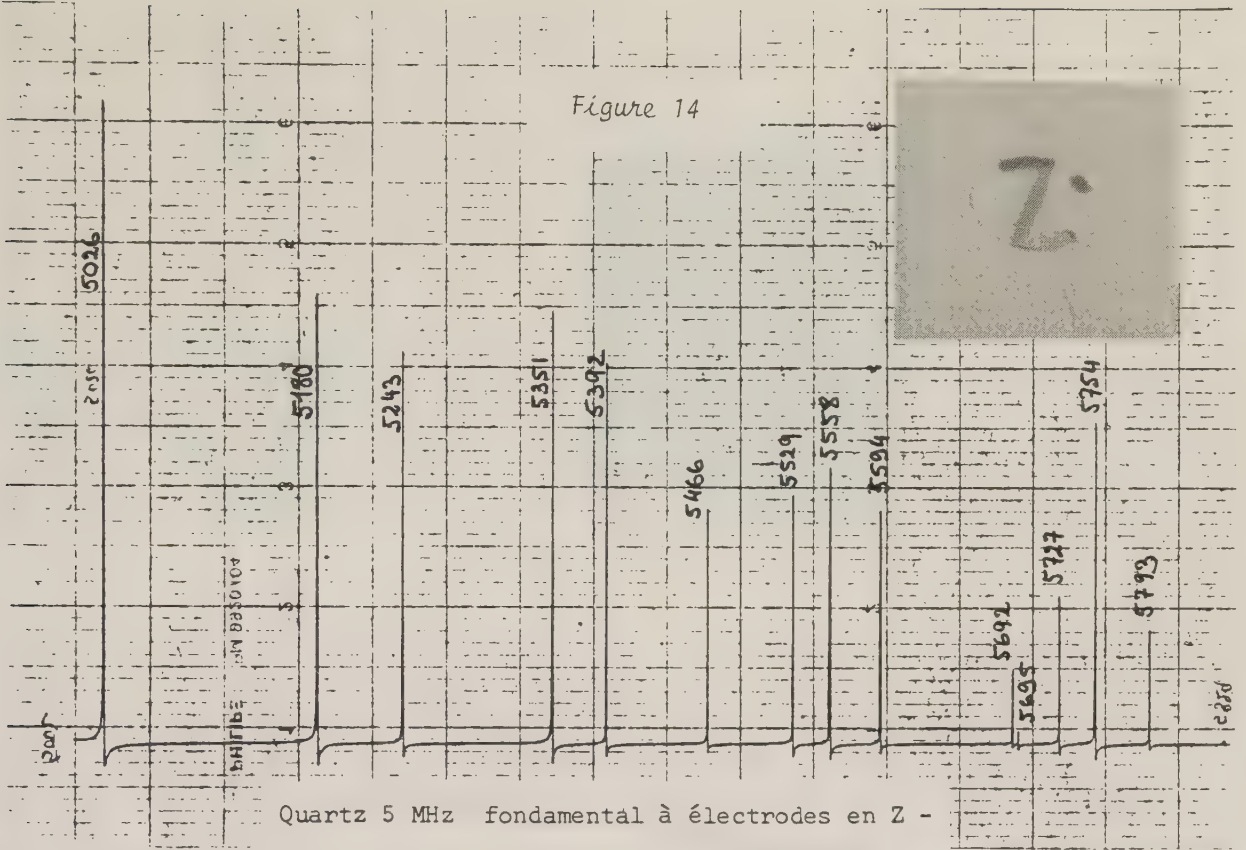
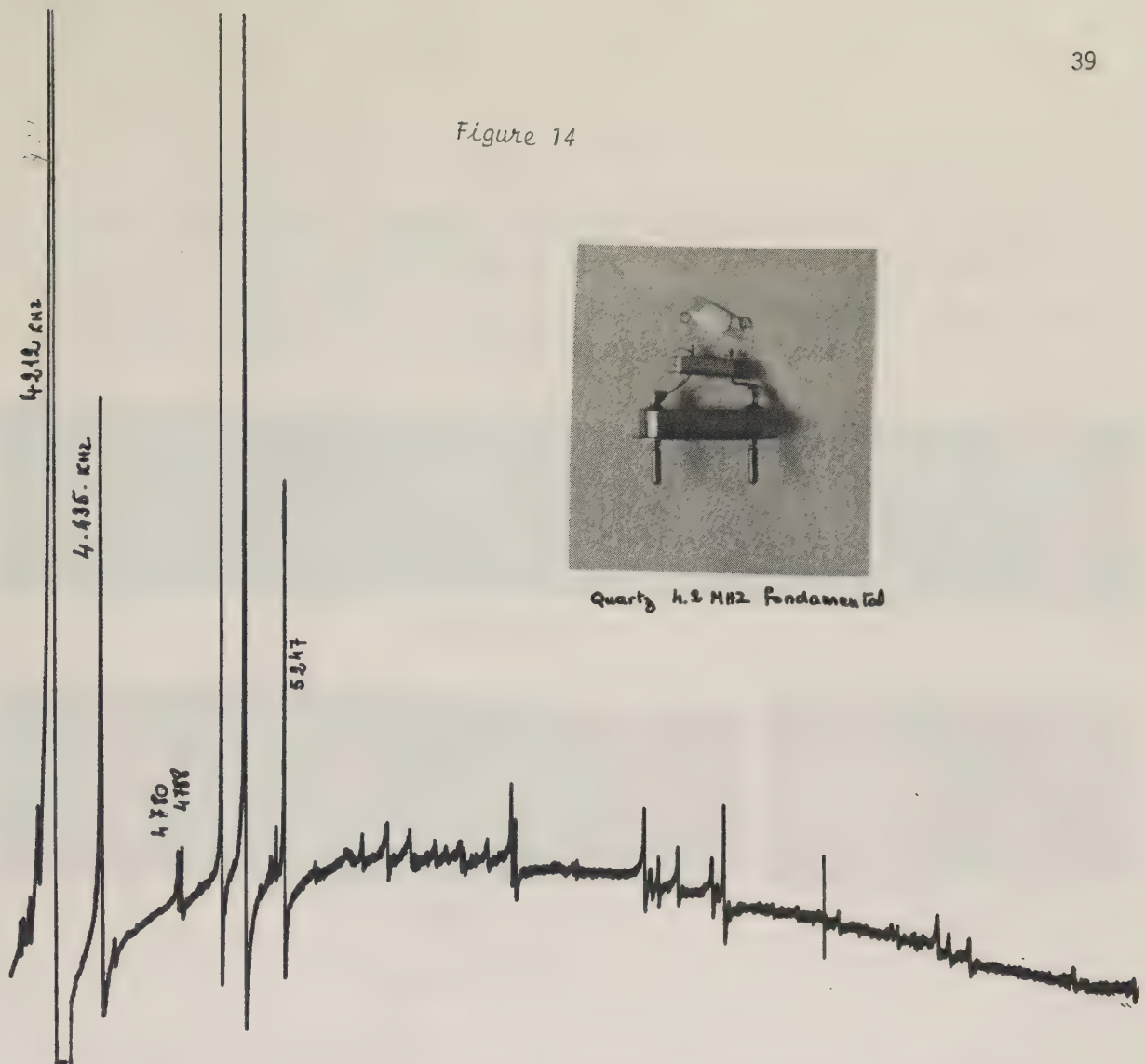


Figure 14



C'est pour cela qu'il a été nécessaire de réaliser des topographies aux différents pics de résonance, pour classer ces différentes résonances.

1/ - Quartz de convexité sphérique :

Dans un premier temps, nous n'étudierons que des quartz plan-convexes dont la surface convexe est une calotte sphérique, ce sont ceux qui sont le plus proche du modèle théorique développé par H.F.Tiersten.

Le résultat du spectre électrique d'un quartz à électrodes circulaires symétriques est, sur la figure 14a comparé aux résultats théoriques Annexe 3 : nous voyons une grande concordance dans les valeurs des fréquences et leur répartition par groupes, surtout à partir du partiel 5.

On montre [28], en traçant les courbes de répartition d'amplitude dans les directions x et z, que pour une pastille de diamètre 15 mm et de rayon de courbure 150 mm, l'amplitude des vibrations peut être considérée comme nulle sur le bord du quartz, seulement à partir du partiel 5.

En effet, nous pouvons remarquer (figure 15) que les vibrations de résonance des partiels inférieurs n'ont rien de commun avec les solutions prévues par la théorie. Elles s'étendent jusque sur les bords de la pastille. Nous dirons de celles-ci qu'elles ne sont pas, ou insuffisamment, piégées.

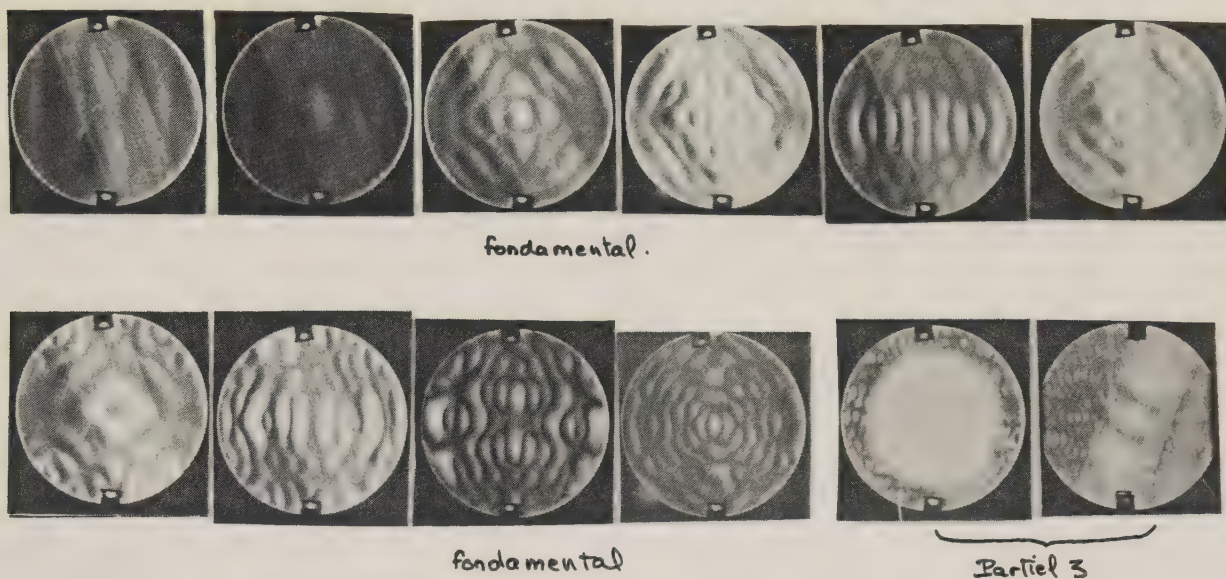


Figure 15

Leur configuration géométrique ne peut donc pas correspondre à ce qui a été prévue par la théorie.

Ces vibrations sont en fait des vibrations de flexion de la plaque créées par le cisaillement pour des valeurs de $\lambda/2$ voisines de l'épaisseur de la plaque. Nous pouvons aisément comparer les lignes de noeuds à une plaque isotrope en flexion dans le cas de modes élevés. [18]



En effet, nous pouvons remarquer (figure 15) que les vibrations de résonance des partiels inférieurs n'ont rien de commun avec les solutions prévues par la théorie. Elles s'étendent jusque sur les bords de la pastille. Nous dirons de celles-ci qu'elles ne sont pas, ou insuffisamment, piégées.

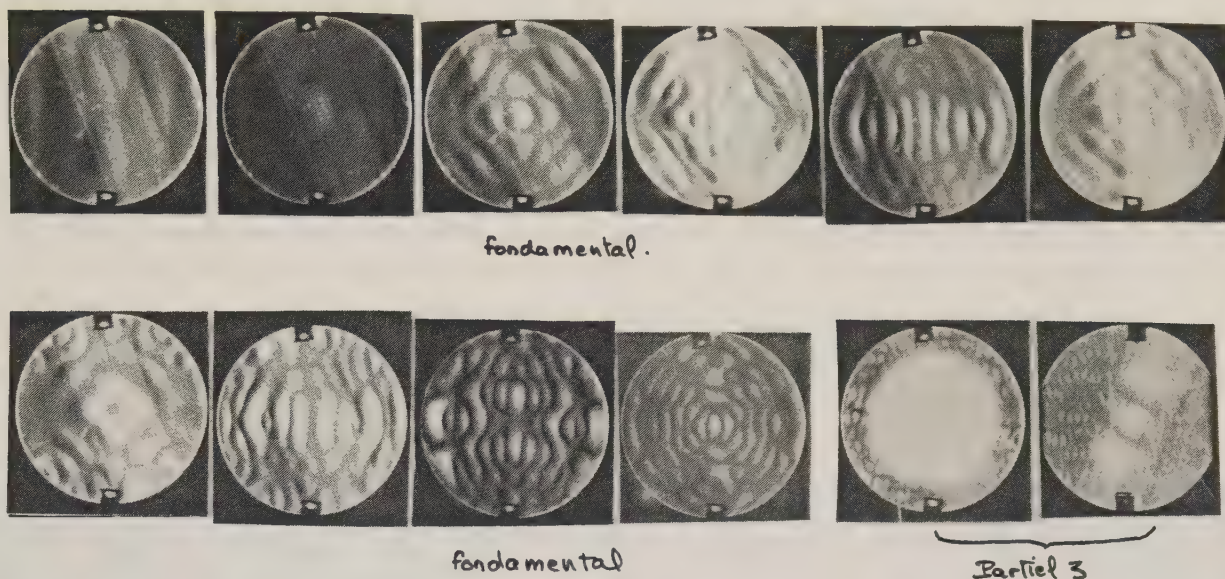
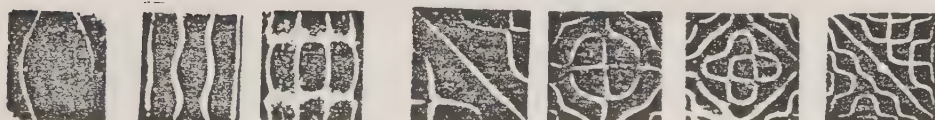


Figure 15

Leur configuration géométrique ne peut donc pas correspondre à ce qui a été prévue par la théorie.

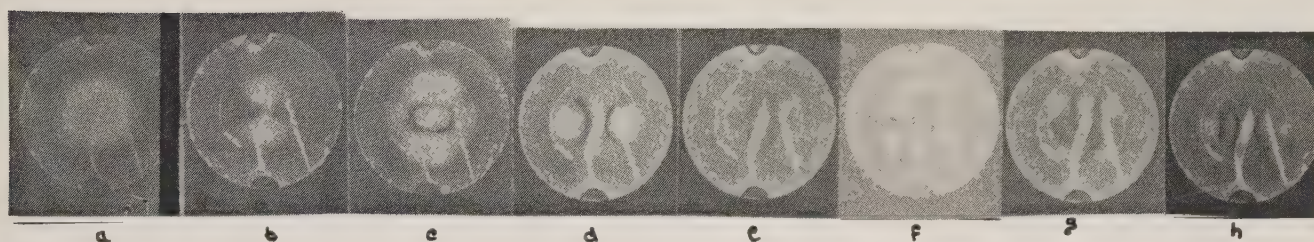
Ces vibrations sont en fait des vibrations de flexion de la plaque créées par le cisaillement pour des valeurs de $\lambda/2$ voisines de l'épaisseur de la plaque. Nous pouvons aisément comparer les lignes de noeuds à une plaque isotrope en flexion dans le cas de modes élevés. [18]



Si nous topographions quelques uns de ces modes de vibration des pastilles plan-convexes ayant des électrodes différentes, nous remarquons :

- a) - que le mode ayant le coefficient de qualité le plus élevé (celui pour lequel le quartz a été construit) est le même quelque soit le dessin des électrodes.
- b) - les différents quartz présentent plus ou moins de pics de résonance suivant la forme de la métallisation.

Nous avons réalisé une série de topographies et nous voyons (figure 16), dans le cas d'une métallisation annulaire, que la configuration des modes est identique à celle prévue par la théorie avec en plus, quelques modes dont nous préciserons la provenance.



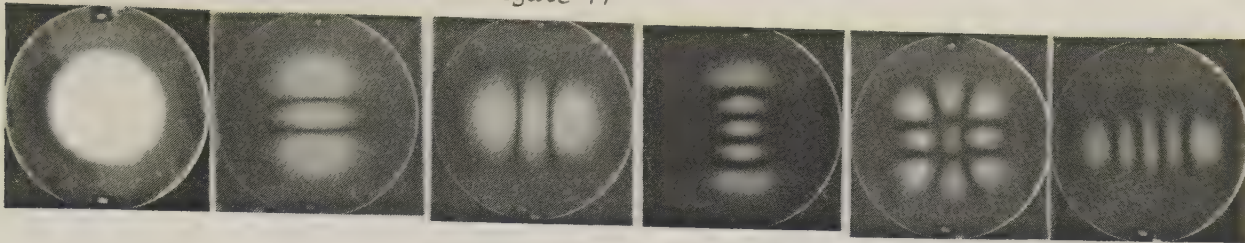
Quartz 2 MHz fondamental à électrodes annulaires

Figure 16

Revenons donc au modèle le plus simple, soit plan-convexe, avec électrodes circulaires. Nous remarquons que :

- a) - la répartition des fréquences se fait par groupes (de sommes d'indices $m + p = \text{const}$) et que ces groupes sont équidistants et que cet écart de fréquence est constant quelque soit le partiel (dans notre cas, l'écart entre les groupes $m + p = 2$ et $m + p = 4$ est de 100 kHz). [Annexe 3]
- b) - à l'intérieur d'un partiel la surface prise par la vibration croît avec les indices des modes m et p , figure 17.

Figure 17



Nous pouvons mesurer l'épaisseur du cristal à l'endroit des taches les plus éloignées du centre de la plaque. Nous calculons la fréquence de résonance, pour le même partiel, correspondant à cette épaisseur et nous retrouvons alors sensiblement la fréquence de vibration de ce mode (compte-tenu de la précision avec lequel on peut déterminer ce point extrême).

Cette remarque nous conduit à assimiler les modes de vibration (différent du n.oo) à des interférences d'ondes dont les sources se trouveraient sur ces taches extrêmes (ou sur le cercle définissant, sur la pastille le lieu des points de la surface convexe équidistant de la surface plane)(Annexe II)

Nous avons résumé sur le tableau (figure 18), les fréquences comparées des différents modes du partiel 11 d'un quartz ($\phi 15 - R. 150.10^{-3}mm$, $2h_o = 1,678.10^{-3}mm$).

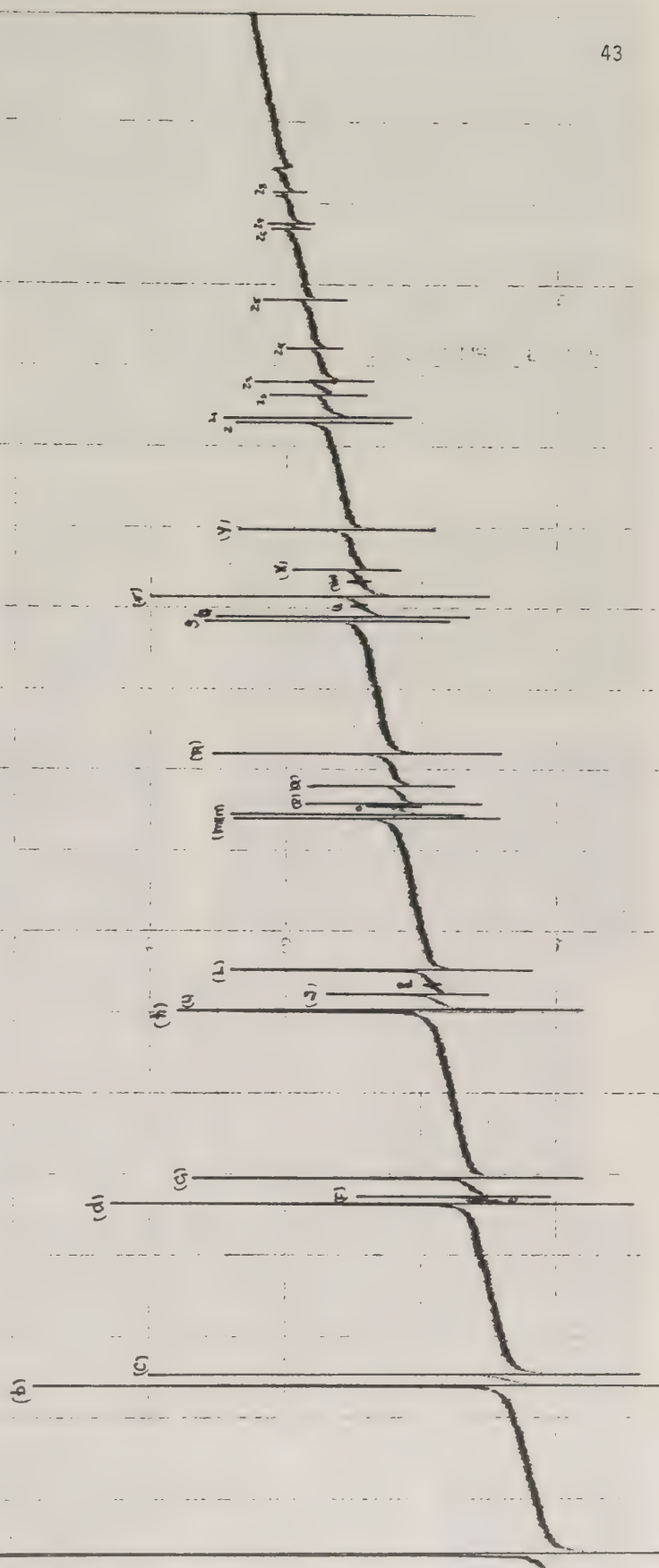
MODE	Fréquence théorique en kHz -	Fréquence expérimentale en kHz -	Fréquence mesurée à partir des topographies -	
11.0.0	10 934,2	10 934,8	<u>d = distance</u> <u>au centre.</u>	
11.0.2	11 035,6	11 037,9	$1,70.10^{-3}$	10 997,94
11.2.0	11 044,6	11 045,3	$1,75.10^{-3}$	11 001,7
11.0.4	11 136,0	non conforme		
11.2.2	11 145,0	11 145,4	$2,45.10^{-3}$	11 066,77
11.4.0	11 153,8	11 155,8	$2,675.10^{-3}$	11 092,5
11.0.6	11 235,6	non conforme		
11.2.4	11 244,4	11 245,9	$2,85.10^{-3}$	11 114,1
11.4.2	11 253,2	11 252,8	$3,025.10^{-3}$	11 113,7
11.6.0	11 262,0	11 266,2	$3,325.10^{-3}$	11 118,0
11.0.8	11 334,2	non conforme		
11.2.6	11 343,0	non conforme		
11.4.4	11 351,8	11 350,8	$3,60.10^{-3}$	11 223,8
11.6.2	11 360,6	11 360,4	$3,625.10^{-3}$	11 227,9
11.8.0	11 369,2	11 376,9	$3,90.10^{-3}$	11 275,5
11.0.10	11 432,2	non conforme		
11.2.8	11 440,8	non conforme		
11.4.6	11 449,4	non conforme		
11.6.4	11 458,2	11 455	$3,95.10^{-3}$	11 284,6
11.8.2	11 466,8	11 468	$4,10.10^{-3}$	11 312,6
11.10.0	11 475,4	11 488	$4,34.10^{-3}$	11 359,9
11.0.12	11 529,0	non conforme		
11.2.10	11 537,6	non conforme		
11.4.8	11 546,2	non conforme		
11.6.6	11 554,8			
11.8.4	11 563,4	11 560,9	$4,36.10^{-3}$	11 364,0
11.10.2	11 572,0	11 576,8	$4,5.10^{-3}$	11 393,2
11.10.0	11 580,6	11 600,7	$4,80.10^{-3}$	11 459,4

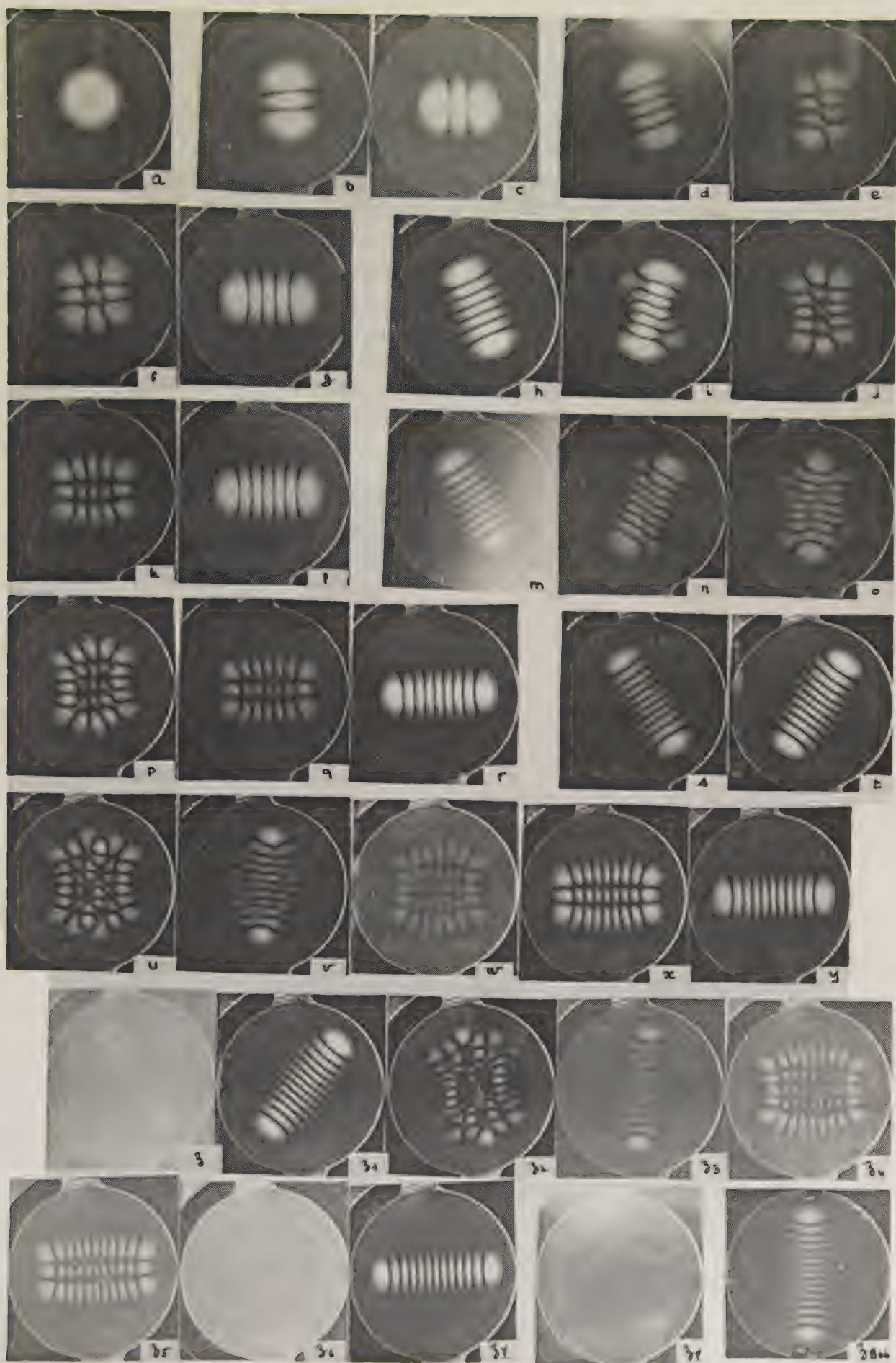
Figure 18

$$F = F_{n\infty} \times \frac{2h_o}{\sqrt{R^2 - d^2} + 2h_o - R}$$

$$2h_o = 1.678 \cdot 10^{-3}$$
$$R = 150 \cdot 10^{-3}$$

Fig 18 b. Spectre électrique du Partiel 14 (Quartz 5 MHz P5)
(Topogra phie page suivante)





Si on métallise la surface d'un quartz, on introduit un terme d'inertie à sa surface qui modifie la valeur de la fréquence de résonance de l'épaisseur : cristal + métallisation (H.F. Tiersten (10) dans le sens d'une diminution de celle-ci. Cette variation, fonction du partiel et de la fréquence, peut atteindre 10 kHz pour une fréquence de 5 MHz, pour une métallisation Or de 200 Å environ, ce qui n'est pas négligeable. Une calotte sphérique métallisée n'aura donc plus comme surface de fréquence une calotte sphérique mais une autre surface comme représentée figure 19.

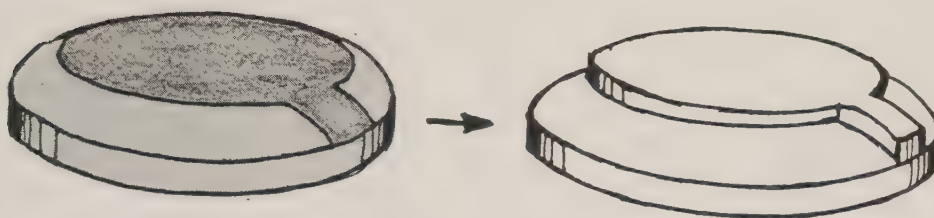


Figure 19

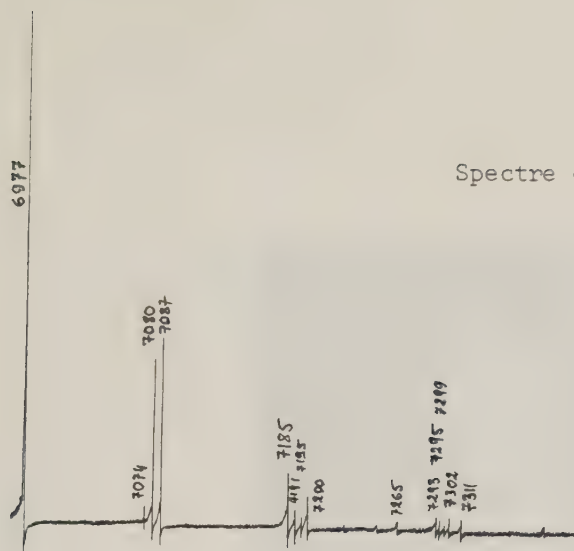
Cette modification entraîne aussi une modification des modes de résonance de la pastille. Nous voyons nettement sur les topographies des figures 16 f et 18 d h, i, m, n, o, s, t, u, v, z, z_1, z_2, z_6, z_8 , ; ces modes, dus sur les topographies "18" à électrodes annulaires et sur les topographies "18" aux branchements des électrodes circulaires et au fait que la calotte sphérique n'est pas centrée sur le quartz, on voit que le piégeage, qui est du à une diminution de l'épaisseur entre le centre et le bord peut être obtenu par une simple métallisation. Cette technique est d'ailleurs employée depuis longtemps et notamment pour les quartz haute fréquence.

Nous avons alors étudié, en détail, les spectres électriques ; nous avons réalisé notamment un balayage du partiel 7 sur une plage de fréquence étroite (100 kHz) et nous avons aussi réalisé le même spectre à l'aide des rayons X (figure 20).

Partiel 7

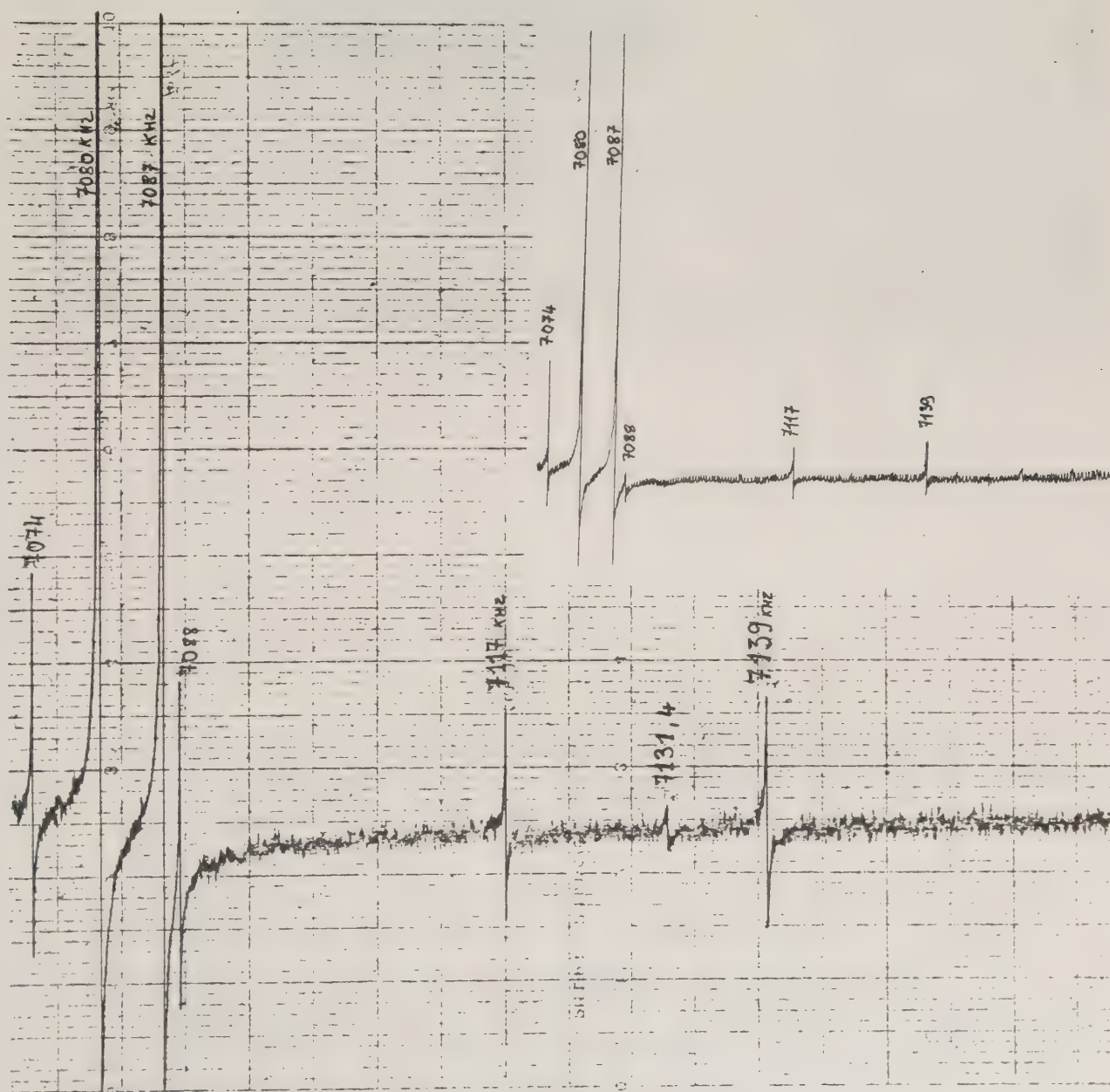
Spectre complet

Figure 20



Spectre détaillé

avec sensibilité croissante



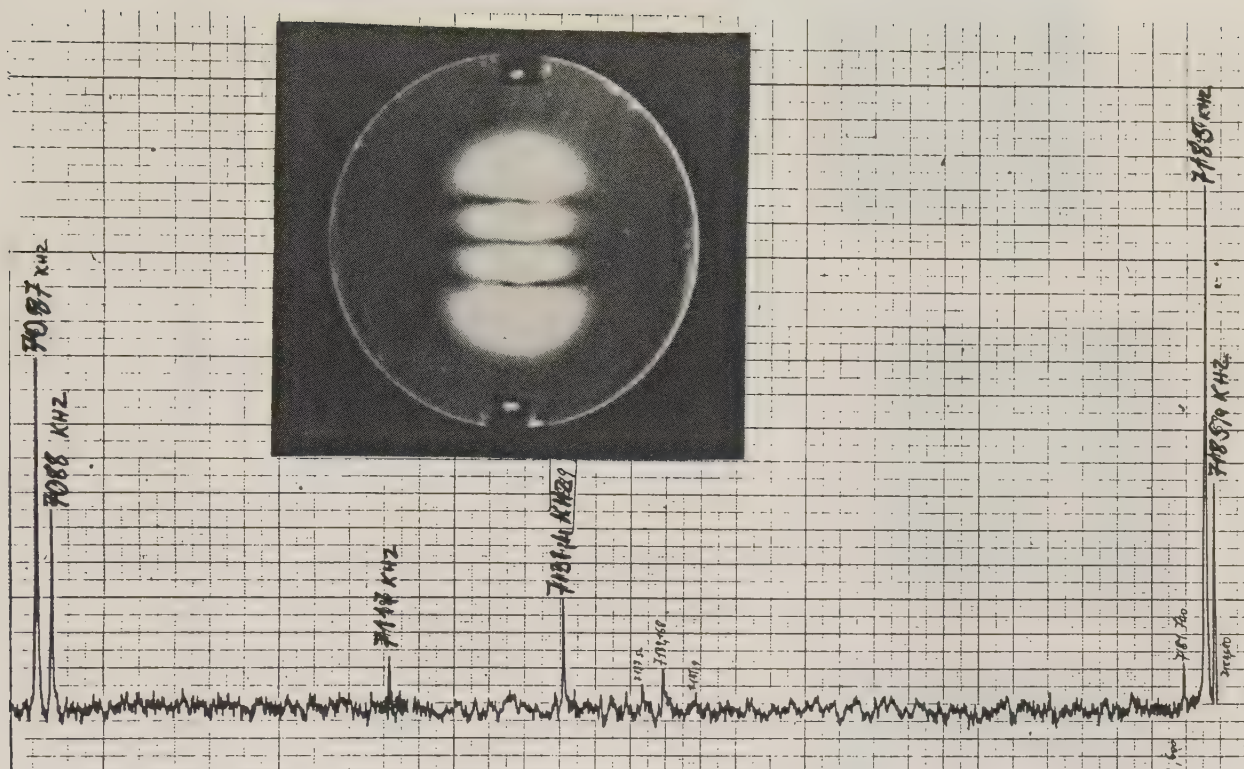


fig 20

Partiel 7 - Spectre mécanique

Nous remarquons alors que certaines résonances qui présentent un très faible signal électrique (7031,4kHz) permettent par contre de diffracter une intensité de rayonnement X plus grande que les modes voisins, dont le signal électrique est plus important.

La topographie de la résonance à 7031,4 kHz nous montre l'image d'un mode de vibration à indices $m + p$ impairs (ici, le mode 7.0.3) que H.F. Tiersten a éliminé de ses solutions et qui correspondent aux solutions prenant en compte les polynômes d'Hermite à indices impairs, (leur symétrie - nombre de taches de vibration pair, surfaces de vibration de signes opposés identiques - conduit à penser, en effet, que le bilan électrique sur l'électrode sera nul).

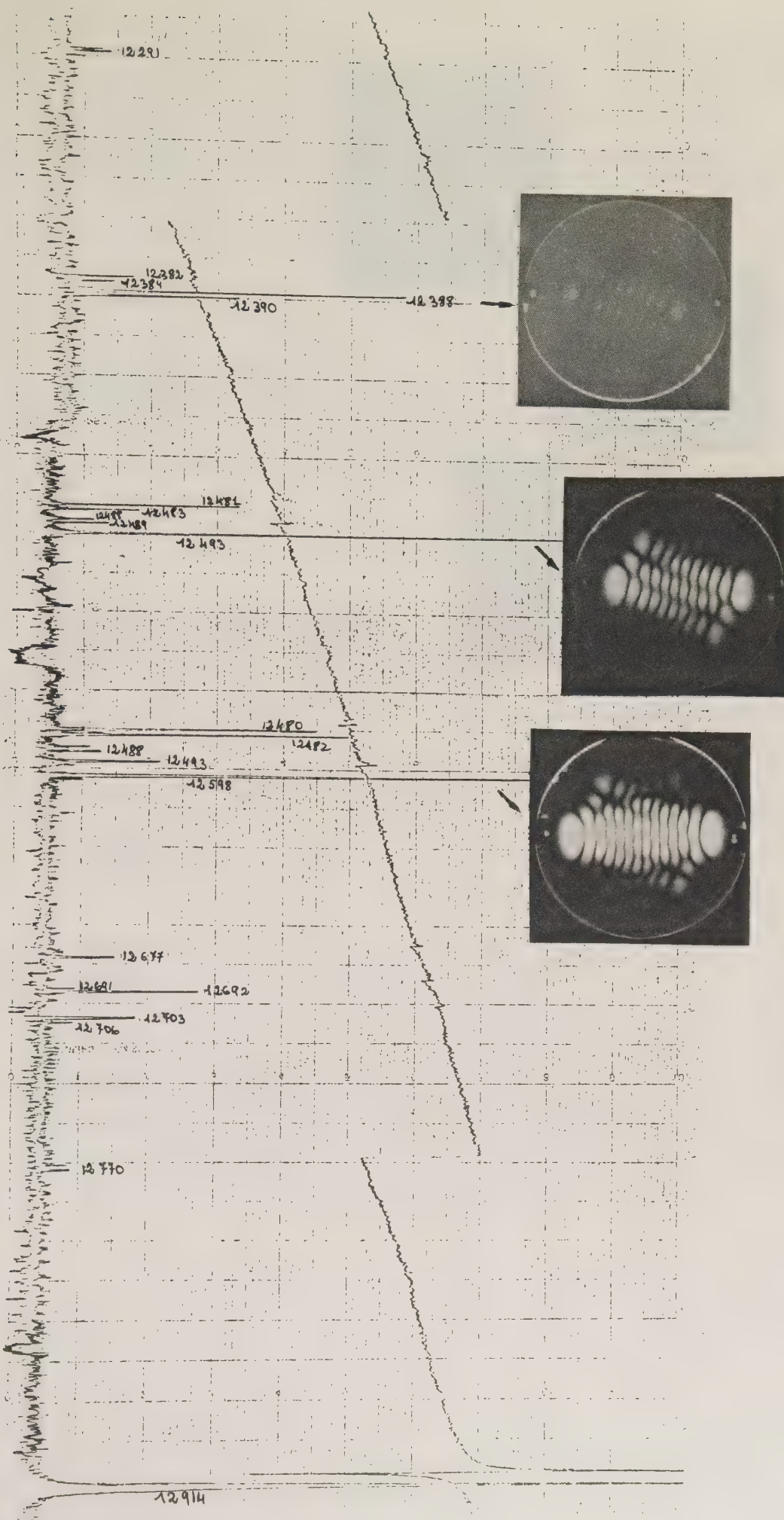


Figure 21

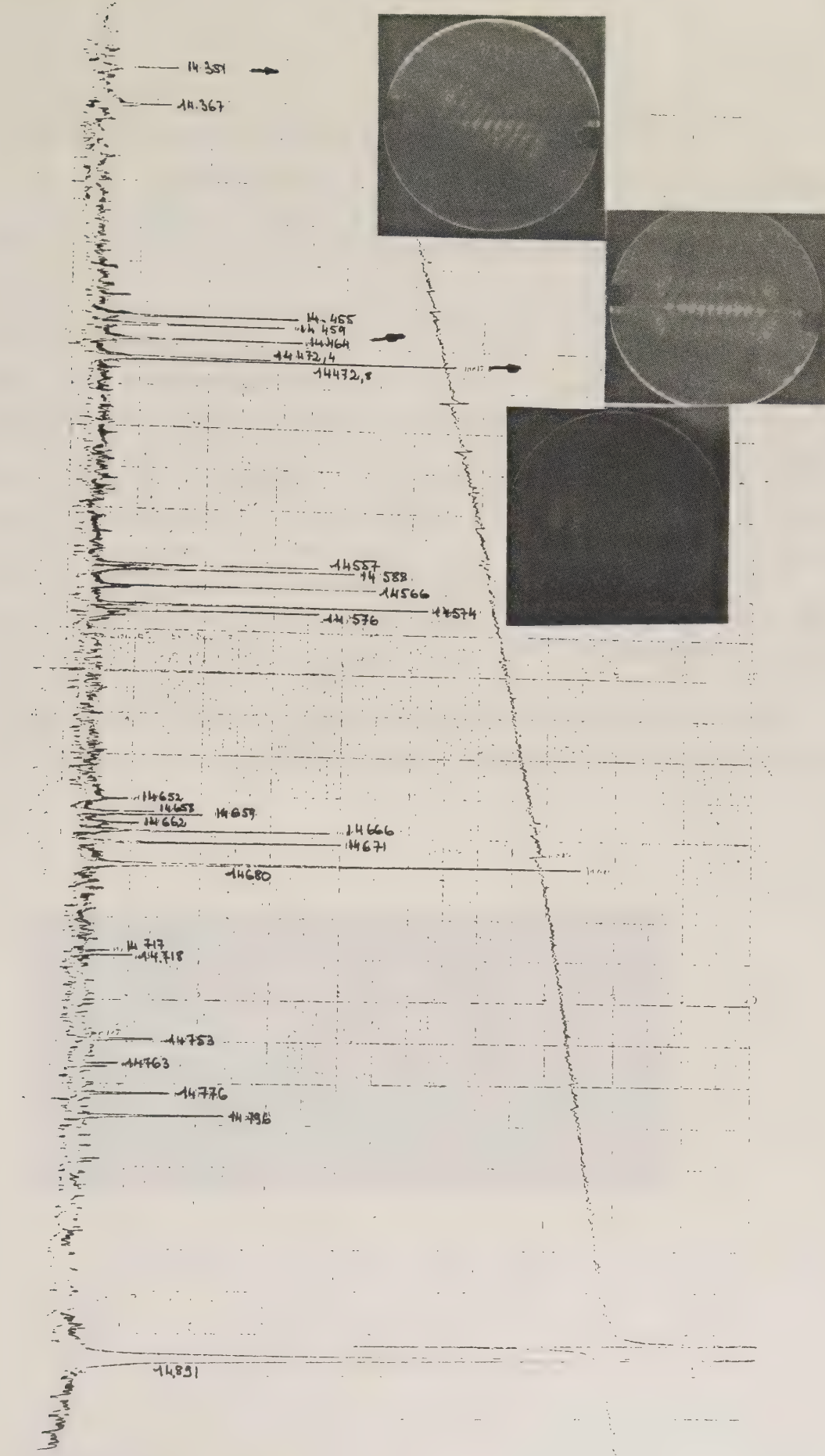


Figure 22

Pour compléter l'investigation sur les résonances nous avons effectué "le spectre mécanique", pour les fréquences comprises entre 500 kHz et 15 MHz. Cette longue étude nous a permis d'observer des résonances précédant les partiels pairs déjà repérés électriquement.

Nous voyons figure 21 et figure 22 ces résonances précédant les partiels 13 et 15.

Nous les avons notés résonances "mécaniques" car le signal électrique qu'elles délivrent est soit très faible soit confondu avec le bruit et indétectable.

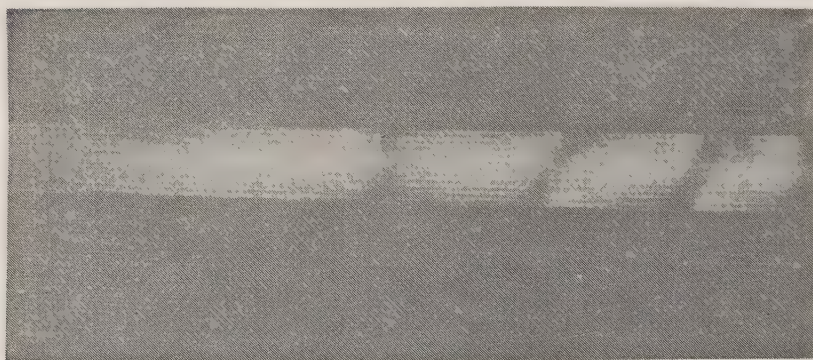
Nous voyons quelques topographies de ces modes (figure 21-22) qui nous montrent une configuration rencontrée pour les modes précédemment étudiés.

Nous pouvons rechercher le rang de partiel auquel appartiennent ces modes.

Par exemple, dans le cas de la topographie du mode à la fréquence 12,389 MHz, nous avons sensiblement un mode de type n.1.8. Ce mode appartient au groupement $m + p = 9$ impair, qui sera donc éloigné du n.oo d'environ $9 \times 50 \text{ kHz} = 450 \text{ kHz}$, ce qui nous donne la fréquence du n.oo à 11,939 MHz.

Si nous observons notre tableau de fréquence théorique [Annexe III] nous voyons que la fréquence du partiel 12 se situerait à 11,924 MHz. Le mode observé appartiendrait donc au partiel 12, partiel pair.

La topographie de section de ce mode (figure 23) nous renseigne, en effet, sur l'appartenance à ce partiel et sur l'existence de ces modes de vibration.



Topographie de Section Partiel pair $n = 12$

Figure 23

Le calcul ne tient pas compte de ces solutions par raison de symétrie d'excitation, nous n'en voyons d'ailleurs l'existence pratique que dans le cas de partiels et de modes élevés pour lesquels tout défaut de symétrie est sanctionné.

En conséquence, il apparaît que le résonateur possède tous les modes de résonance décrits par les trois indices n, m, p (entiers naturels) à condition que la pastille soit suffisamment grande pour permettre la fréquence des modes (m, p) .

En traçant les courbes de fréquence, déjà citées page 13, mais pour des partiels plus élevés, nous constatons que si le résonateur a des dimensions suffisantes, il est possible de le faire vibrer simultanément sur des partiels différents. (Figure 24)

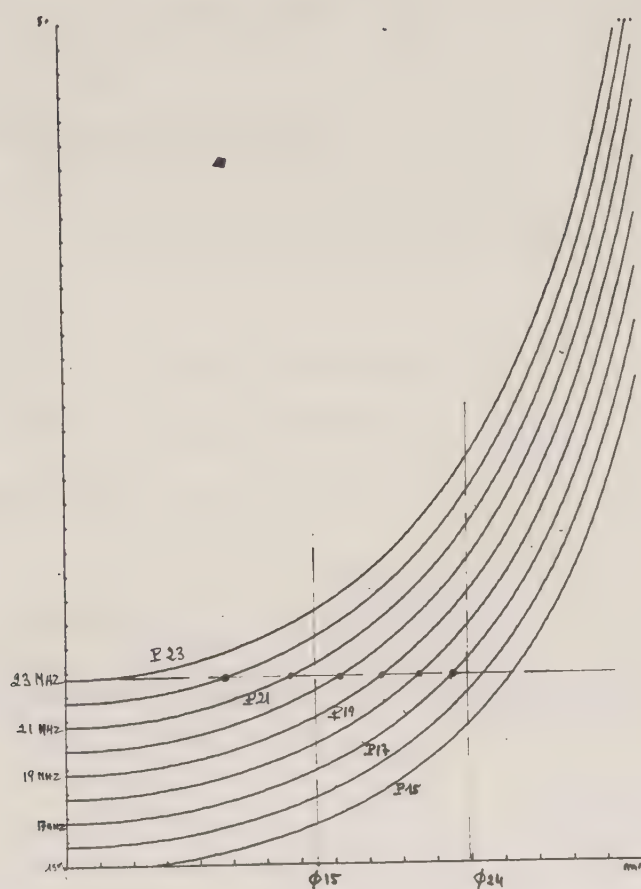


Figure 24

Les topographies, figure 25, nous montrent cet effet de superposition de plusieurs modes :

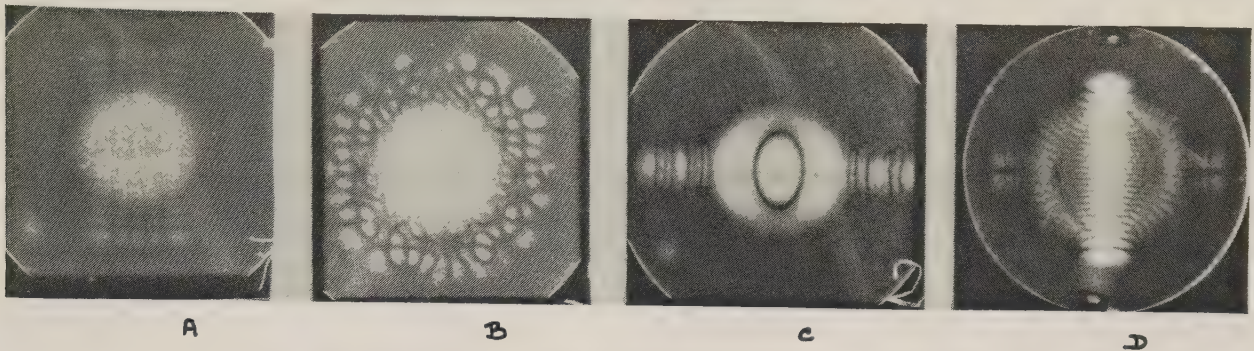


Figure 25

en A, notamment, on reconnaît la superposition d'un mode n_{00} et $n'_{18.4}$;
en D, nous avons un mode dégénéré à 24 noeuds suivant z' et un autre mode superposé dont on distingue 1 noeud suivant z' , la distance des sources de ces 2 modes est :

pour le plus brillant : $d = 4.455$

on sait que :

$$F_{n_{00}} = \frac{F (\sqrt{R^2 - d^2} + h_0 - R)}{h_0}$$

$$h_0 = 1.678 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 150 \cdot 10^{-3}$$

$$F = 29,986.500 \text{ MHz}$$

$$F_{n_{00}} = 28\ 803.993$$

pour un $F_{29\ 00} = 28\ 740.2$

et pour le plus sombre $d = 5.792$

$$F_{n_{00}} = 27\ 987.358$$

pour un $F_{28\ 00} = 27,752.2 \text{ MHz}$

Nous avons un mode pair de type 28.43.1 superposé au mode excité.

1/ - Quartz de convexité non sphérique :

Si la convexité du résonateur est différente d'une calotte sphérique, nous retrouvons néanmoins les caractères propres à la variation d'épaisseur dans la mesure où cette variation ne présente pas de forte discontinuités. Nous avons étudié ainsi un résonateur de forme ellipsoïdale (figure 26).

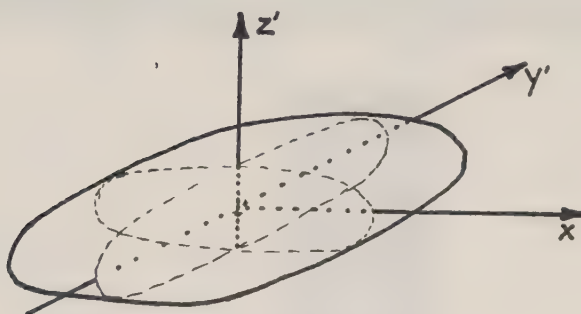


Figure 26

les rayons de courbure sont différents suivant $\vec{x}$ et $\vec{z}$. Nous retrouvons sur ces pastilles les mêmes modes que sur les pastilles sphériques groupés de la même façon, par groupe à indices $m + p = \text{cste}$, mais du fait de la différence de convexité suivant $\vec{x}$ et $\vec{z}$. Ces groupes peuvent se recouvrir, comme nous le voyons, figure 27, :

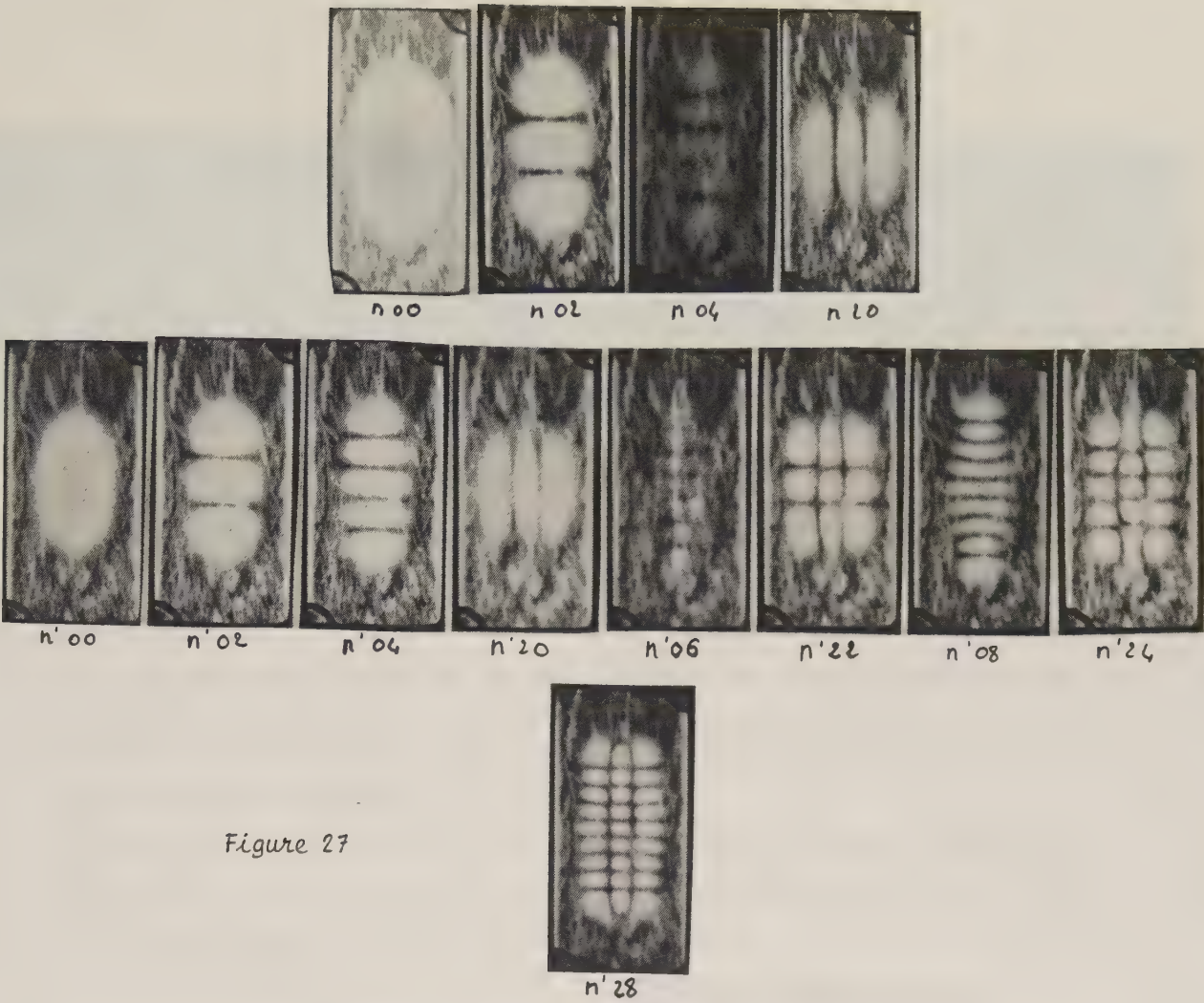
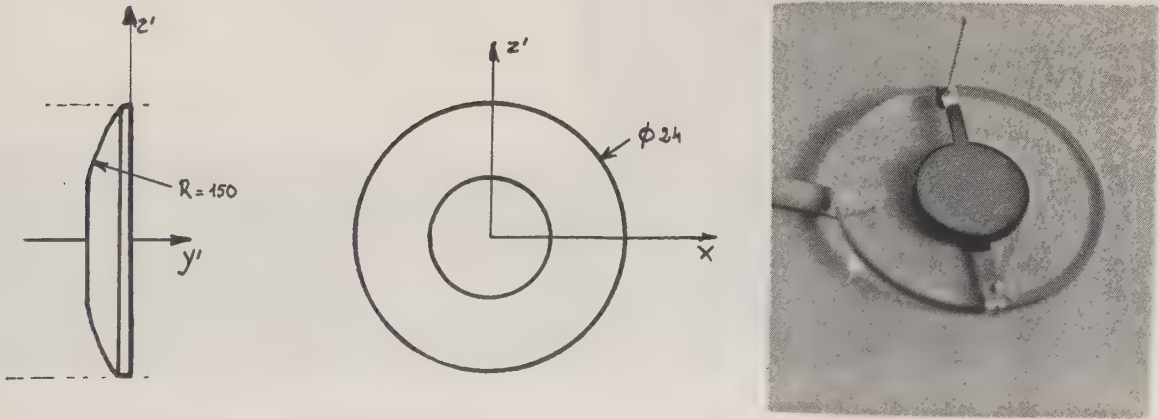


Figure 27

Nous retrouvons le même phénomène dans le cas plus particulier du quartz ci-dessous :



qui nous donne les modes suivants (figure 28) :

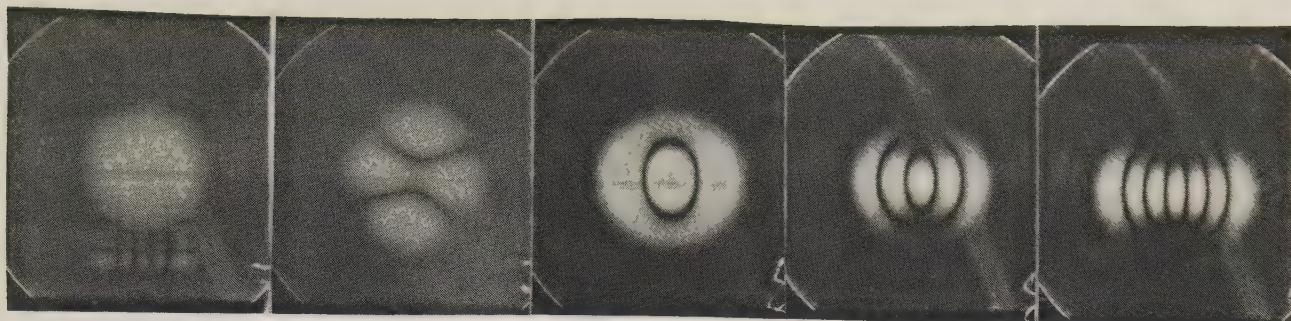


Figure 28

En considérant qu'à partir d'une certaine fréquence, toute variation d'épaisseur de quelques dixièmes de microns entraîne une variation importante de fréquence, il devient impossible de considérer une surface comme plane mais, du fait des techniques de rodage ou de polissage, comme une surface à très grand rayon de courbure.

En effet, si nous analysons un résonateur plan-plan totalement métallisé, de diamètre 15 mm, nous observons sur les topographies de partiels élevés, les mêmes modes que les pastilles plane-convexes, ce qui montre bien l'existence d'un grand rayon de courbure.

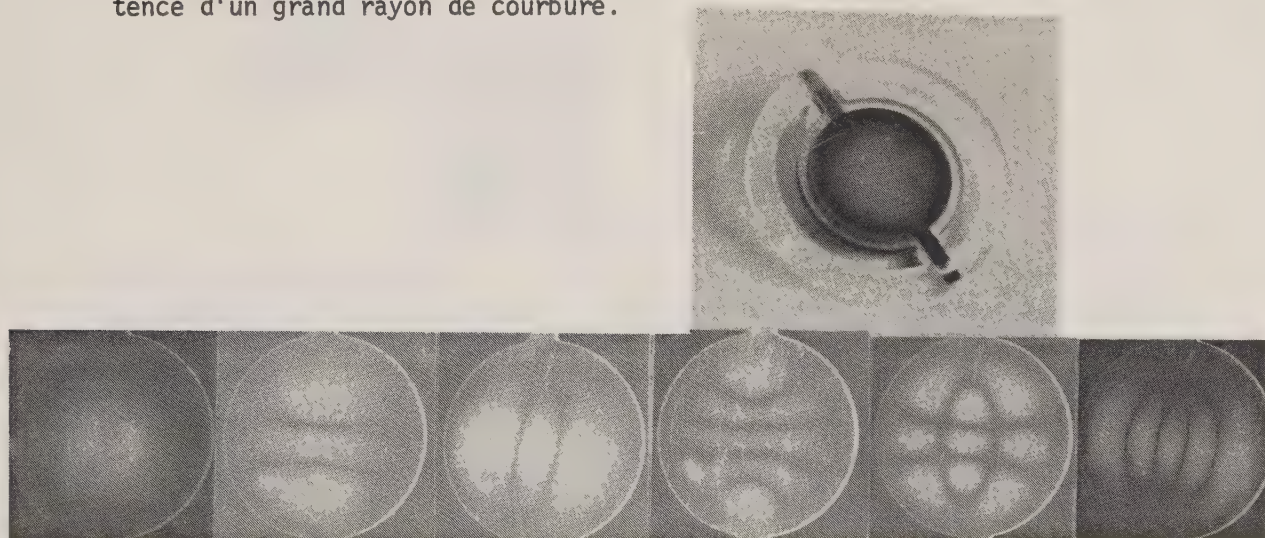


Figure 29 Topographie - Partiel 23

D - OBSERVATIONS COMPLÉMENTAIRES ET EFFETS PARTICULIERS :

Notre étude s'est limitée jusqu'à maintenant à l'observation du déplacement u_1 sanctionné par les topographies par les plans $2\bar{1}.0$. Nous avons, cependant, essayé de topographier les deux autres composantes u_2 et u_3 couplées élastiquement à u_1 .

a/ - Déplacement u_2 :

Comme nous l'avons vu au paragraphe B, il faut prendre un plan perpendiculaire au mouvement que l'on veut étudier. Pour le mouvement u_2 , le plan de forte densité atomique le plus proche est le plan d'indice $0\bar{1}.1$ sensiblement parallèle aux faces du résonateur.

Cette méthode de topographies, (méthode de Berg Barret) est généralement employée pour étudier les états de surface, car la partie du faisceau ayant un long trajet dans le cristal est énormément amortie alors que l'autre est réfléchie sans absorption.

Nous pouvons néanmoins l'utiliser avec une incidence à un ordre élevé (ordre 7 dans nos cas) afin que l'angle du faisceau avec la normale au cristal soit assez proche des 45° .

Nous voyons, figure 31, le résultat en section pour résonateur vibrant en partiel 5 à 5 MHz (mode 5.00).

On ne voit que très difficilement la face de sortie du cristal, alors que la face d'entrée est surexposée.

Nous avons réalisé aussi la topographie de projection du mode 5.0.0. et 5.0.2 pour son déplacement u_2 .

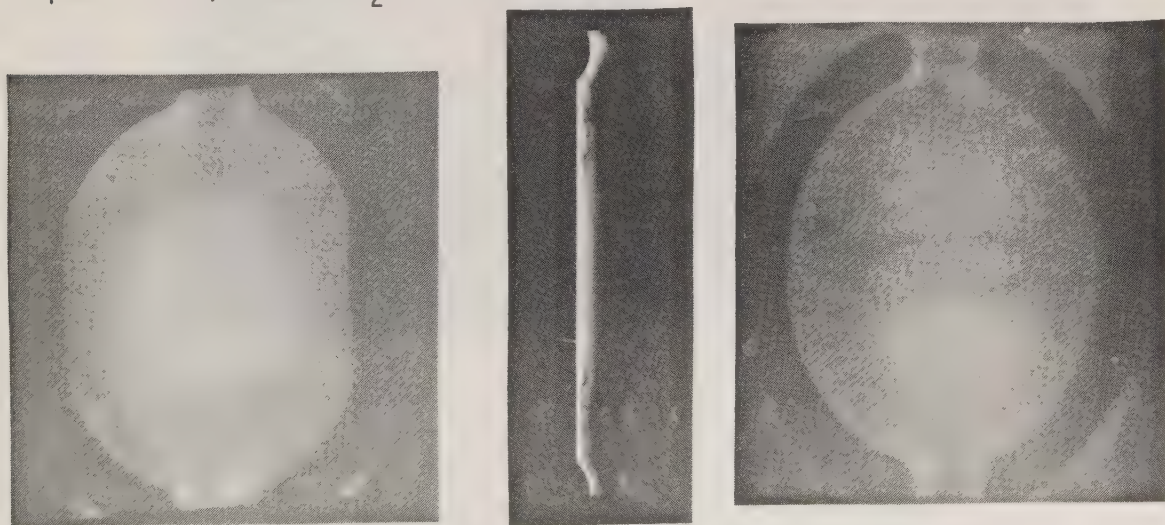


Figure 31 Projection - 5.0.0. Section - 5.0.0. - Projection - 5.0.2

Ces topographies sont très longues à obtenir, c'est pour cela qu'elles n'ont pas fait l'objet d'une étude plus approfondie, on voit cependant que la répartition de la composante u_2 est la même que celle de u_1 . (la configuration sur le plan $\vec{x}\vec{z}$ est la même que pour le déplacement u_1), ce qui est en accord avec la théorie de Tiersten. Le piégeage ne semble pas aussi parfait que pour u_1 , mais nous devons signaler que ces topographies ont été réalisées en excitant le résonateur par une tension d'environ 8 volts efficaces (puissance d'environ 18 mwatt) et qu'alors les effets sont sensiblement modifiés.

b/ - Déplacement u_3 :

Pour étudier le mouvement u_3 , nous avons pris un plan perpendiculaire au plan $2\bar{1}.0$ et faisant un angle de $2,5^\circ$ avec la normale à la face du résonateur. Nous avons obtenu la topographie de projection du mode 5.0.0. (figure 32). La répartition de u_3 est en accord avec l'étude faite sur la surface d'un résonateur plan convexe, à l'Université de Yokohama, à l'aide d'une méthode d'interférométrie par laser[25], la topographie de section est d'interprétation plus complexe et nécessiterait une étude plus approfondie à l'aide de plans de diffraction plus perpendiculaires à la composante u_3 que le plan $0\bar{1}.2$.

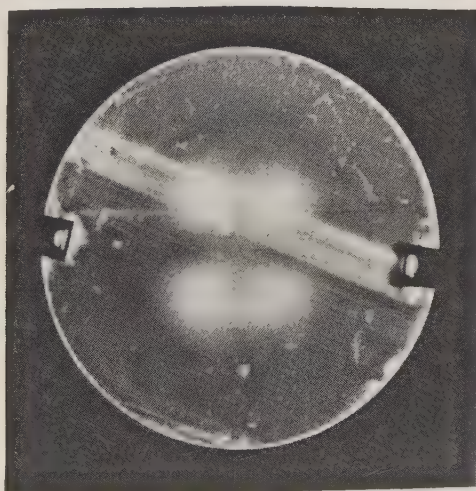
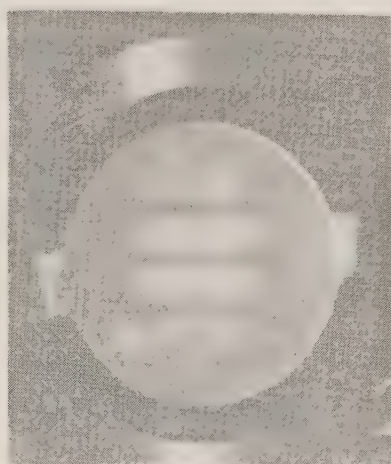


Figure 32 Mode 5.0.0
Plan $0\bar{1}.2$



Mode 5.2.0
Plan $0\bar{1}.2$

Ce qui est plus remarquable est la variation de la répartition du mouvement u_3 lorsque l'on augmente la puissance d'excitation du résonateur et que l'on rentre dans le domaine de fort défaut d'isochronisme, nous avons observé une augmentation du nombre de noeuds dans les deux directions x et z , comme nous le voyons, figure 33 .

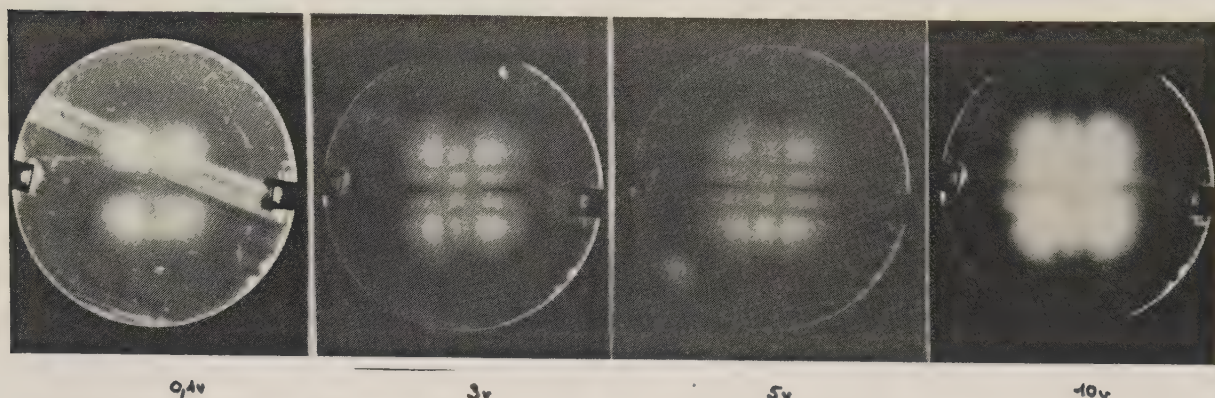


Figure 33

c/ - Effet de couplage et génération de fréquence inférieure ou supérieure :

En étudiant avec plus de détail, les résonances des modes, nous avons remarqué que certaines courbes de résonance présentaient des défauts quand on faisait varier le niveau d'excitation (phénomène non décrit par la théorie linéaire).

Le défaut d'isochronisme des résonateurs à quartz est un phénomène qui a été déjà décrit [19] . Ce phénomène est d'ailleurs facilement vérifiable, (figure 34)

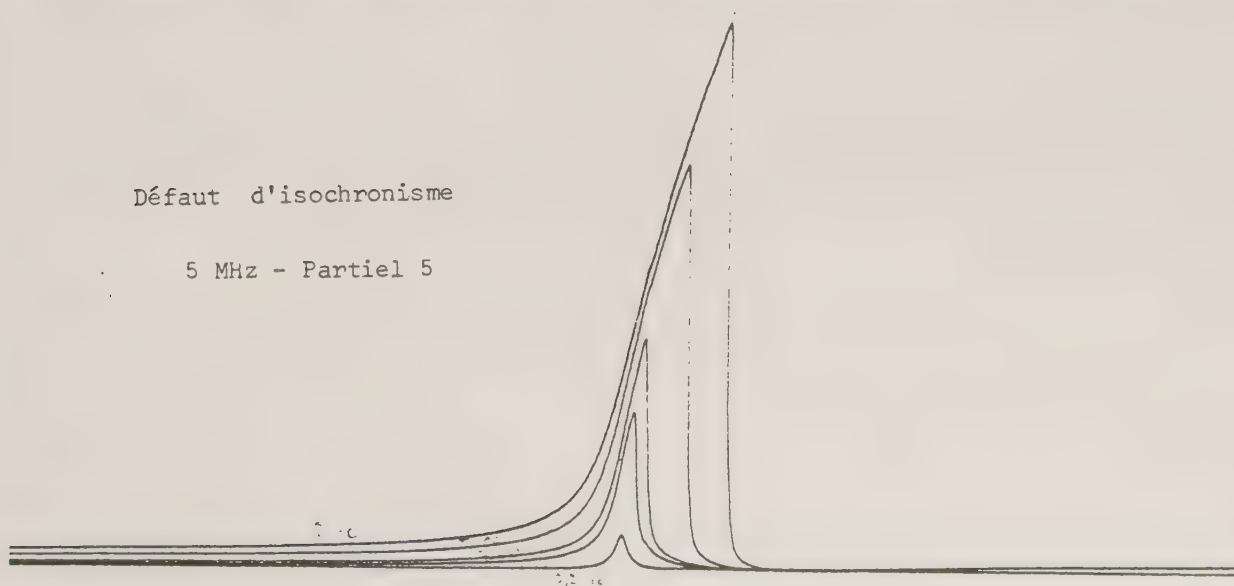


Figure 34

Nous avons remarqué au cours de nos expériences que certains pics présentaient un défaut d'isochronisme dirigé vers les fréquences décroissantes (figure 35).

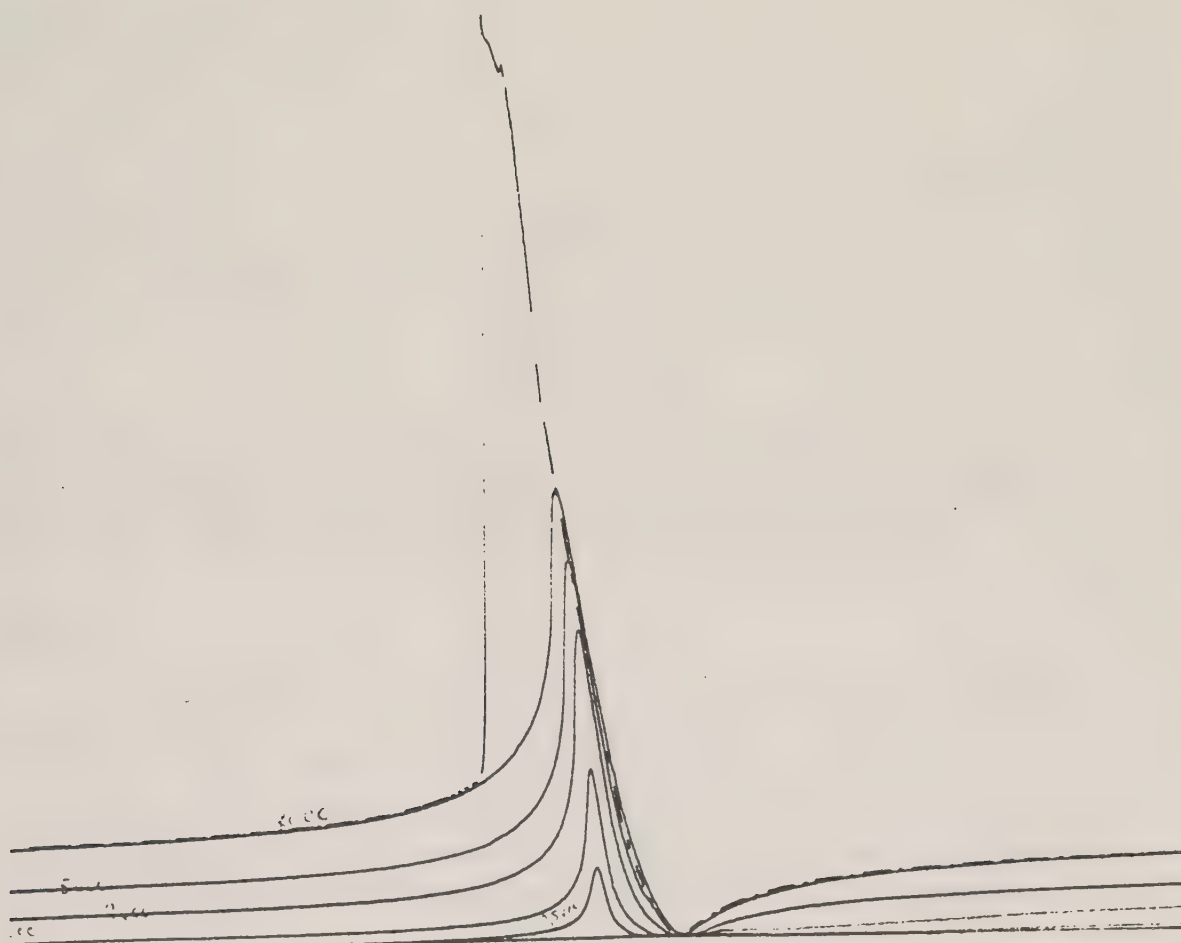


Figure 35 Défaut d'isochronisme - 6,977 MHz - Partiel 7

Dans ces deux cas, nous n'avons pas de phénomène de distortion notable du signal électrique. Nous avons relevé un phénomène de double résonance du type de celui vu figure 36, pour certaines résonances et pour des niveaux d'excitation assez élevés (5 à 8v efficaces aux bornes du quartz).

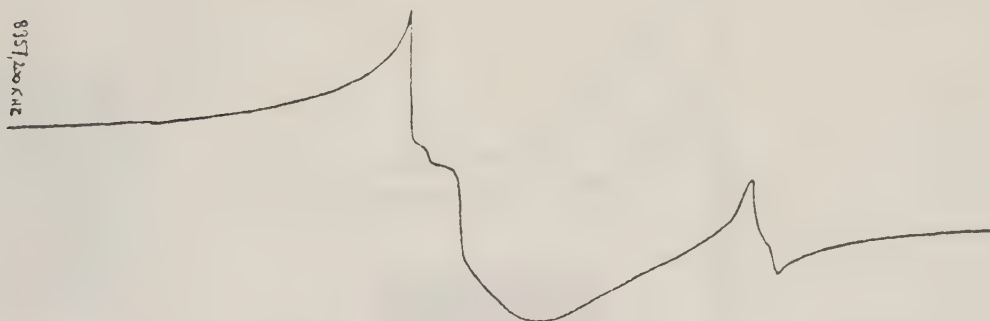


Figure 36 8,957 MHz - Partiel 9

Ce phénomène s'est retrouvé sur un autre résonateur (4,6 MHz - P_5) pour des niveaux d'excitation faibles (de l'ordre de 1 v eff. au borne du quartz). Nous voyons la description de ce phénomène sur les figures A.B.C.D.

FIGURE A

Nous avons ici l'enregistrement de la courbe caractéristique de la résonance du partiel 15 (13,792 264 MHz) pour des valeurs de tension de 0 - 0,5 - 0,75 v eff., ces courbes présentent néanmoins un défaut au voisinage de 13,793 MHz. Nous voyons les topographies du mode réalisées à un niveau extrêmement bas de 0,1 v eff. car au-delà, nous ne pouvons pas enregistrer les 16 franges blanches caractéristiques du mode mais seulement les topographies visibles, figure C.

FIGURE B

Nous avons là, un enregistrement des courbes fréquences amplitudes électriques à différents niveaux d'excitation (montée et descente en fréquence).

FIGURE C

Nous avons enregistré la courbe d'intensité de rayons X diffractée (mécanique) pour la tension 8v. Nous voyons les topographies réalisées aux

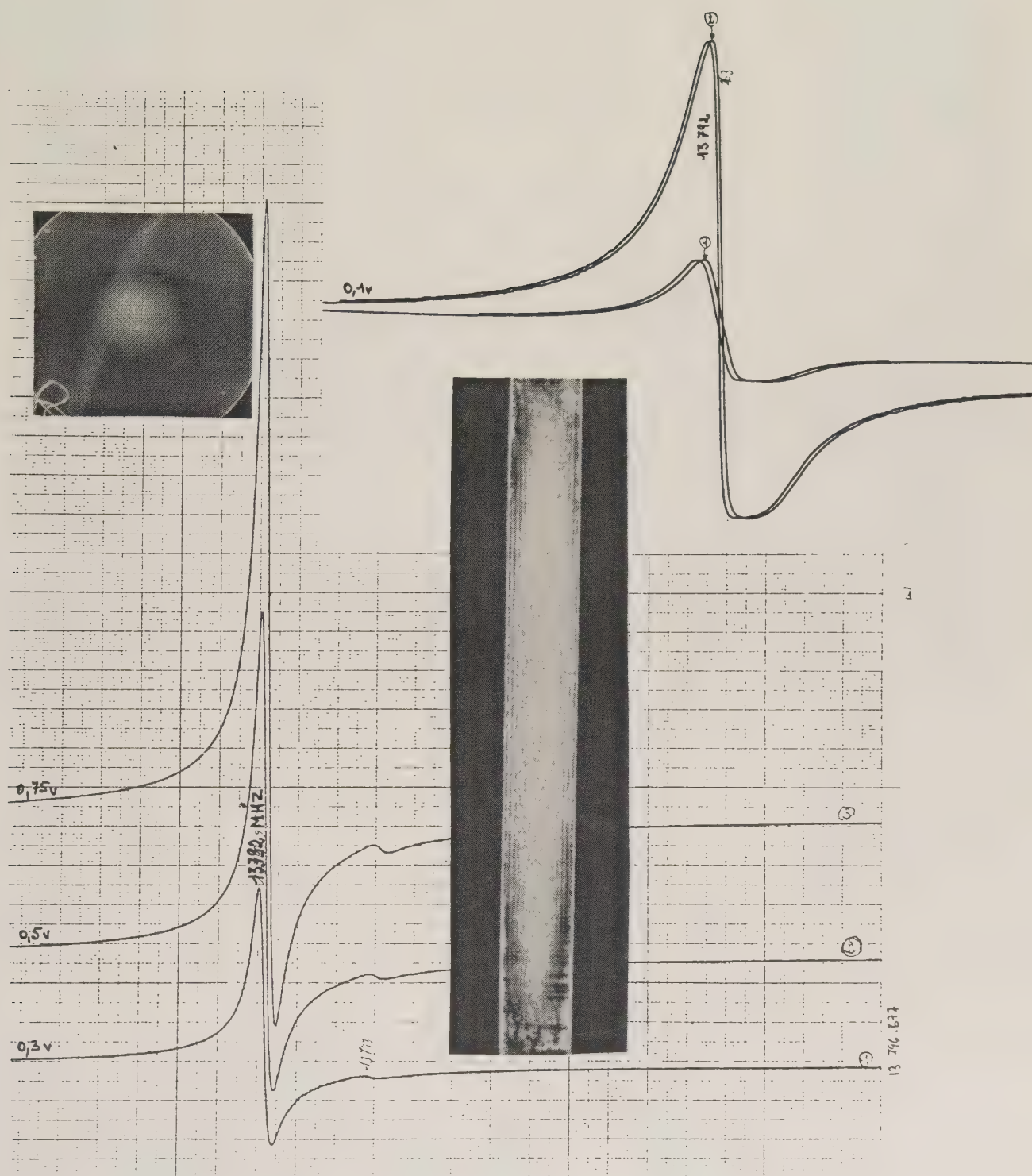


Figure A

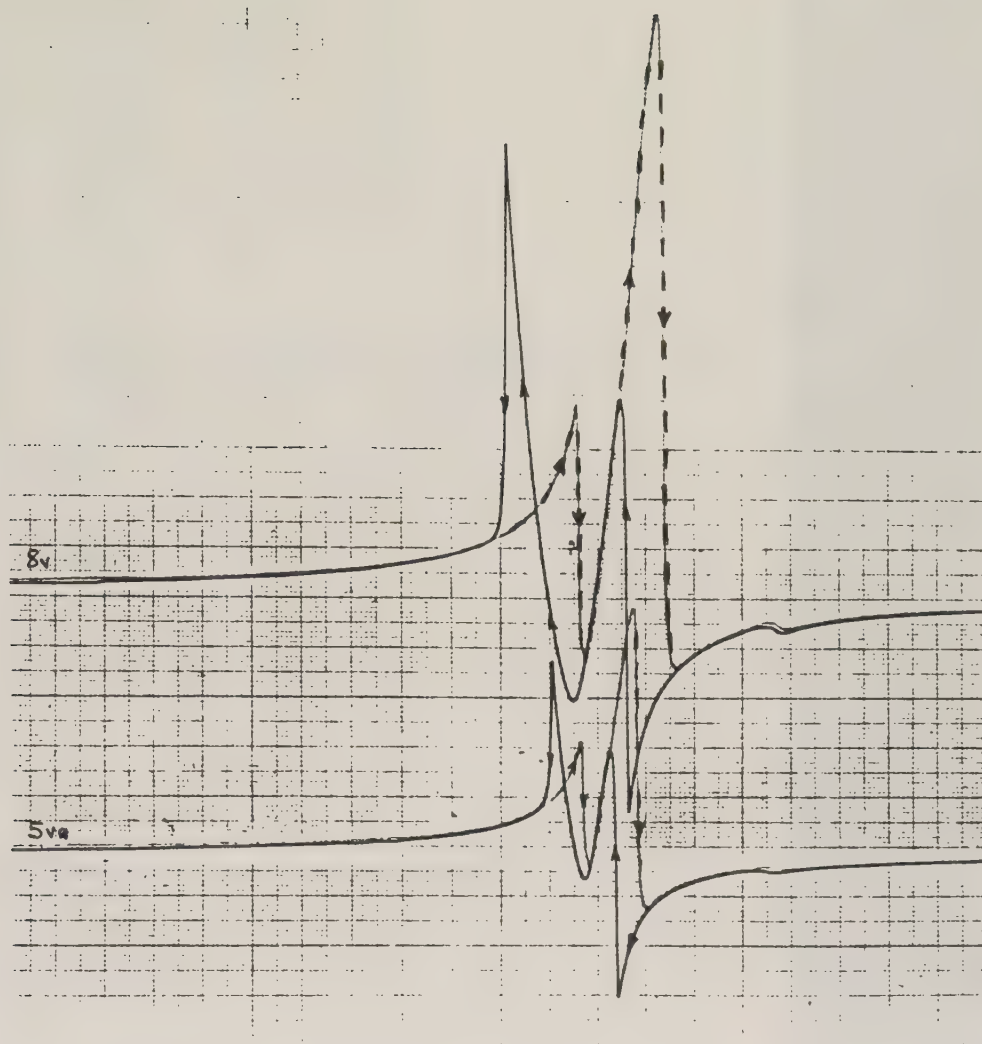


Figure B

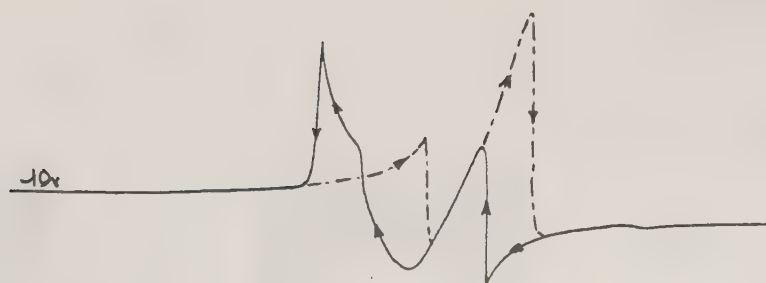
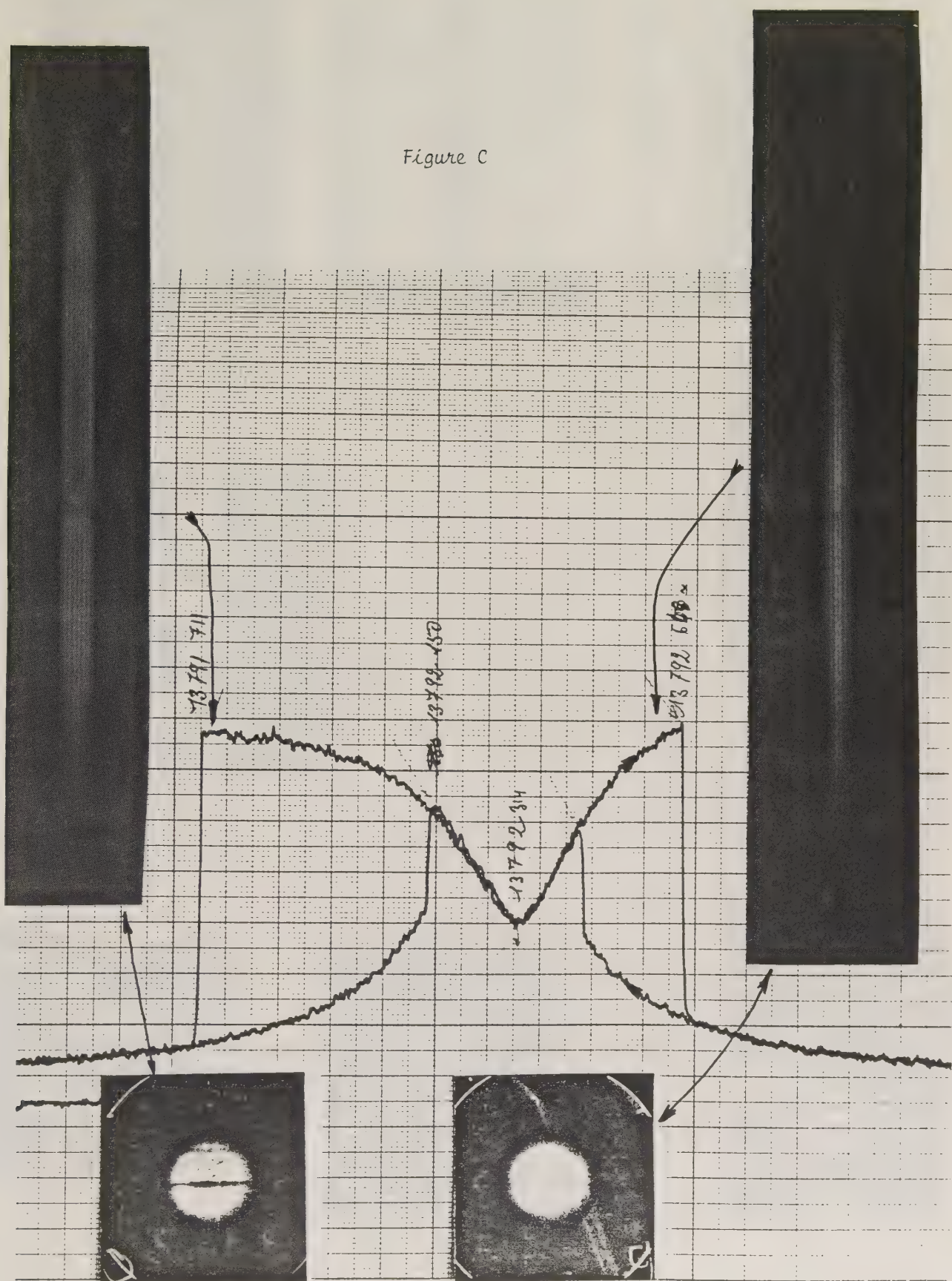


Figure C



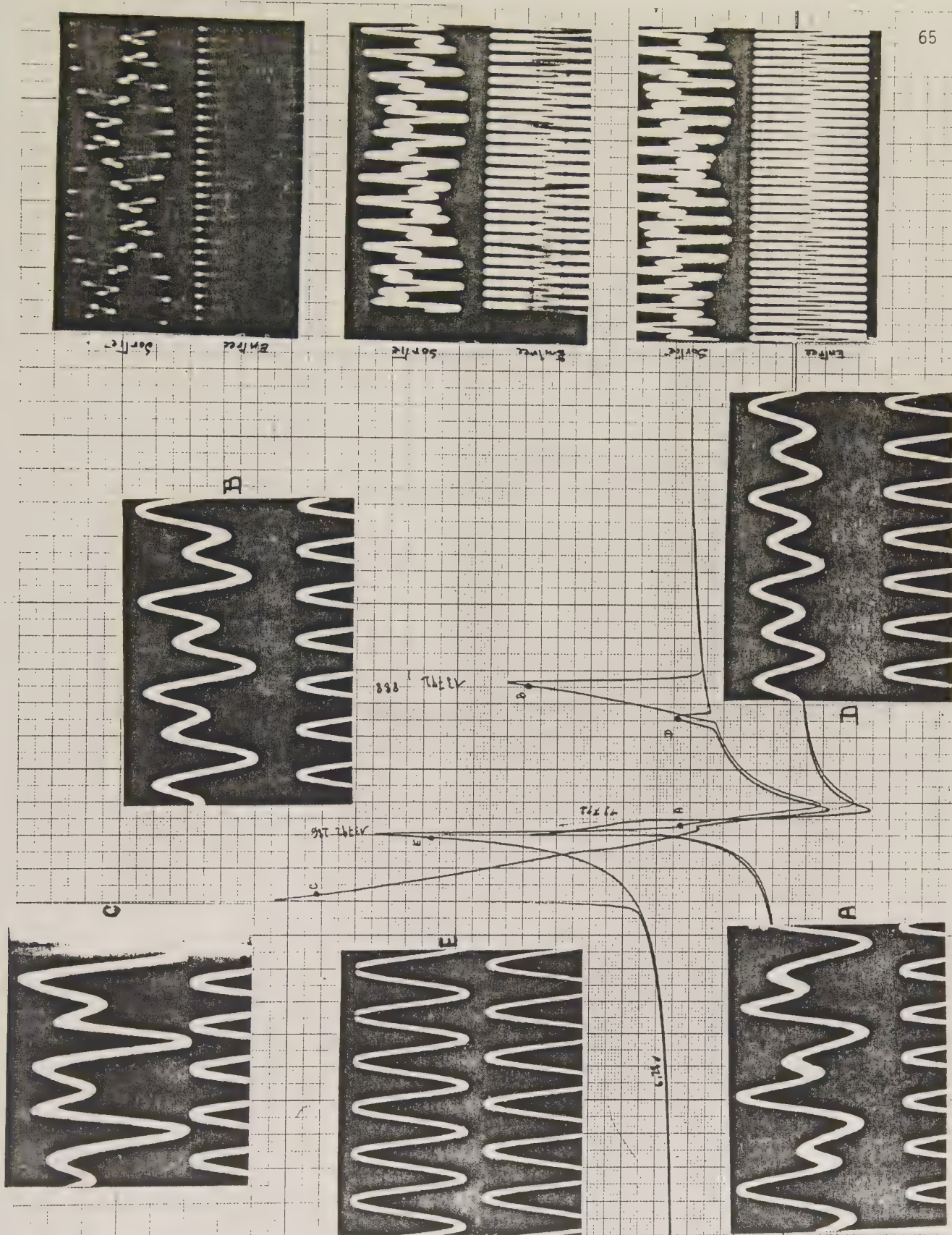


Figure D

différents pics de cette courbe. Nous remarquons que nous n'avons que huit franges blanches sanctionnant un partiel 7.

FIGURE D

Nous avons ici les photographies du signal électrique (entrée et sortie) à différents points de la courbe amplitude - fréquence électrique, ce signal présente plusieurs fréquences que nous avons déterminées à l'analyseur de spectre Tecktronic.

13.792 MHz Partiel 15

6.944 MHz partiel 7 correspondant au (7.00)

21 142 MHz partiel 23 correspondant au (23.00) n'est pas visible sur les topographies.

Ces phénomènes font actuellement l'objet des calculs non-linéaires de Monsieur BALBI.

Nous avons terminé l'investigation sur le spectre d'un résonateur à quartz plan-convexe de coupe AT vibrant en cisaillement d'épaisseur. Nous allons voir maintenant quelles applications peuvent être faites de la connaissance de ces modes et de leur répartition dans la plaque.

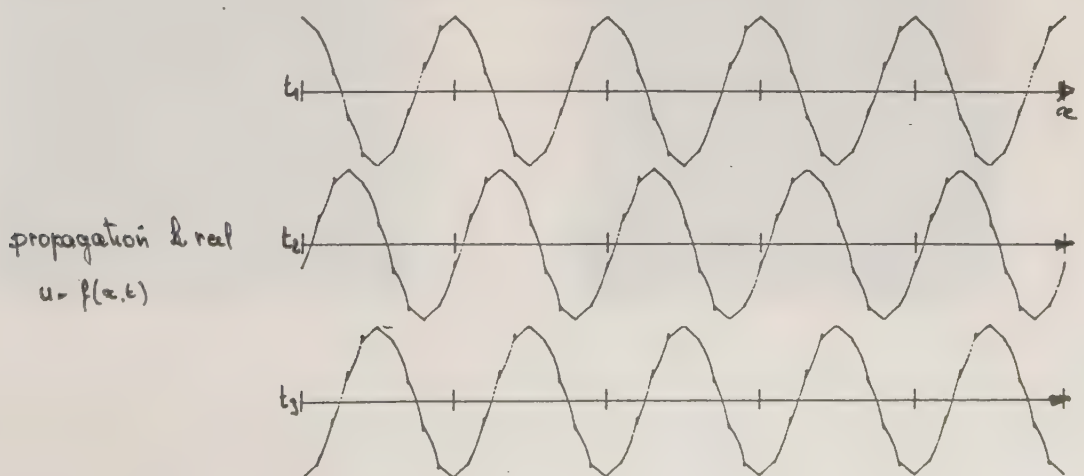
CHAPITRE III

SYNTHESE DES MODES DE VIBRATION D'UN RESONATEUR A QUARTZ PLAN CONVEXE DE COUPE AT -

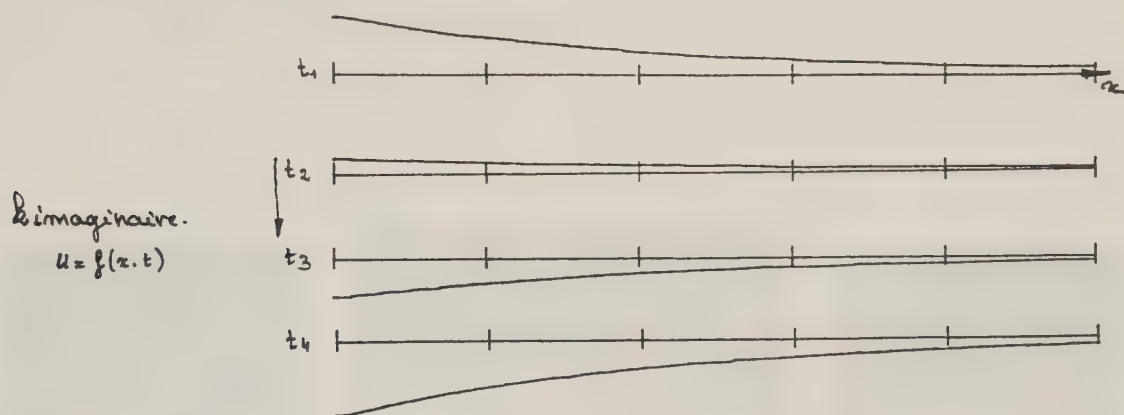
A - DESCRIPTION DES MODES -

L'existence du piégeage supprime une famille de conditions aux limites (sur les bords de la pastille) permettant d'expliquer les différentes fréquences de résonance. Nous pouvons donc reprendre l'idée suggérée au Chapitre Précédent pour expliquer leurs existences. Nous avons décidé d'assimiler ces modes à des interférences d'ondes avec la fréquence, le nombre d'ondes de ces ondes étant variable en fonction de l'épaisseur h , et pouvant être imaginaire ou réel suivant que l'on est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle des sources, ou ce qui revient au même, à un point où l'épaisseur du cristal est inférieur ou supérieur à l'épaisseur aux points sources (7).

A l'intérieur de ce cercle, l'onde se propage (k variable mais réel).

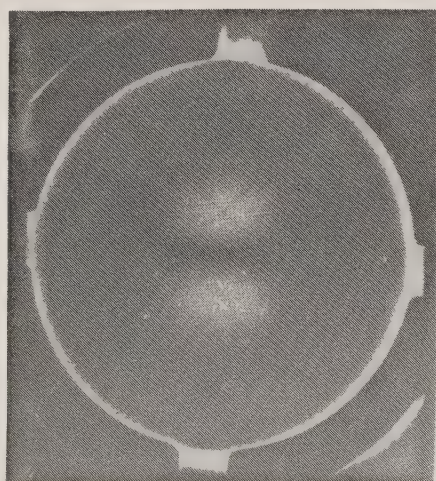


A l'extérieur, l'onde ne se propage pas et est amortie dans l'espace (k variable mais imaginaire).

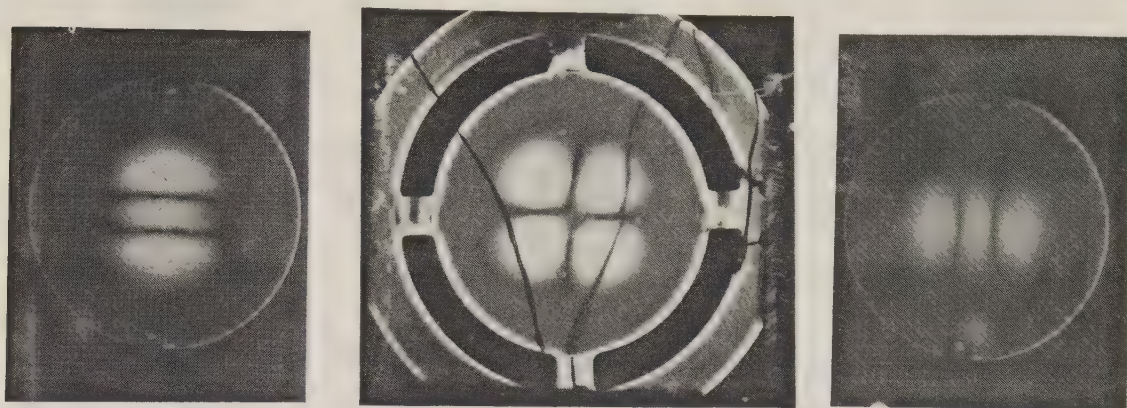


Nous avons réalisé quelques simulations de modes successifs dans le cas le plus simplifié à l'aide d'un ordinateur Hewlett-Packard 9830 (Annexe III). Nous pouvons alors plus facilement imaginer les diverses figures de résonance possible dans le cas du cisaillement d'épaisseur.

Le mode le plus simple $n.00$ est la figure d'une source unique au centre de la pastille (cercle de rayon nul). Le $n.01$ a deux taches de signes opposés (les deux ensembles de sources vibrent en opposition de phase) de même que $n1.0$ dont les lignes de noeuds sont orthogonales à celles du mode précédent (l'ordre d'apparition des modes, quand la fréquence croît étant fixé par la grandeur relative des nombres d'ondes attachés aux directions $\vec{z}$ et $\vec{x}$).



Ensuite, viennent successivement les modes n.0.2 répondant aux conditions d'existence liées à la dispersion suivant $\vec{o}\vec{z}$ puis n.1.1. qui combine les deux conditions (à l'ordre 1) suivant ox et oz puis n.2.0. lié aux conditions suivant $\vec{o}\vec{x}$.



De la même manière, nous construisons la suite des modes avec n.03, n.1.2., n.2.1., n.3.0. pour l'ordre 3, nous pouvons ordonner cela dans un tableau à deux entrées identiques pour tous les partiels.

(VOIR TABLEAU CI-JOINT)

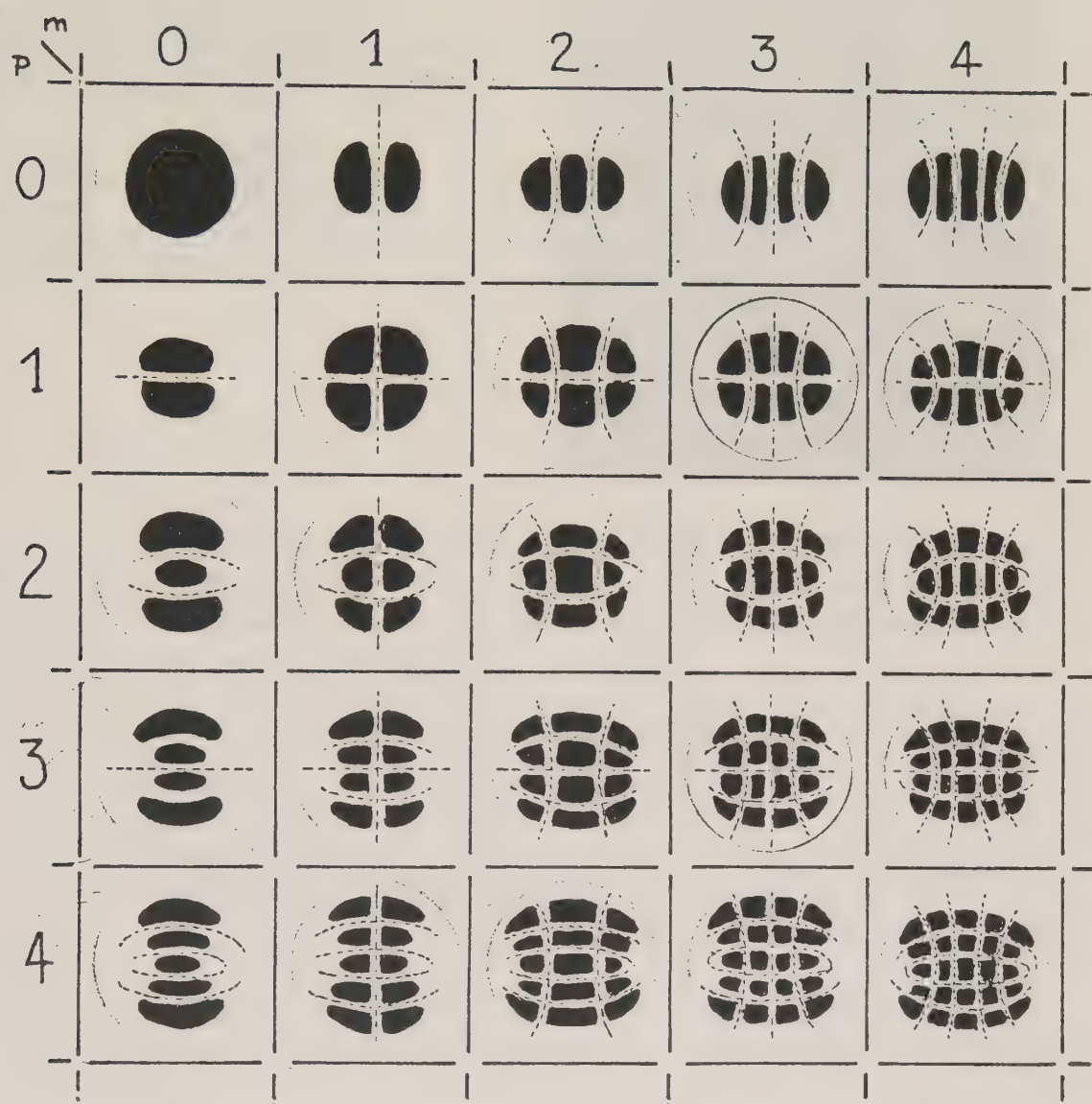
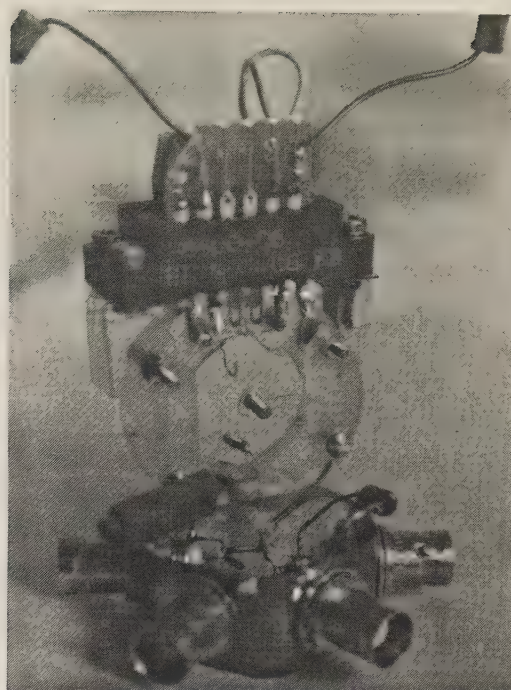


Figure 37

Ces topographies ont été obtenues à l'aide de montages que nous avons réalisés et qui permettent d'appliquer sur le quartz un champ électrique dont la symétrie peut être fixée a priori.

A l'aide d'un quartz non métallisé et d'électrodes libres de faible surface, nous avons excité des différents modes et vérifié l'opposition de phase des différentes taches.



Grâce à ce montage simple, nous avons pu réaliser un nombre important d'expériences et vérifier l'existence des modes décrits dans le tableau précédent. Nous avons réalisé d'ailleurs à partir d'un résonateur 5 MHz, un spectre où figure tous les premiers modes cités ci-dessus (figure 38)

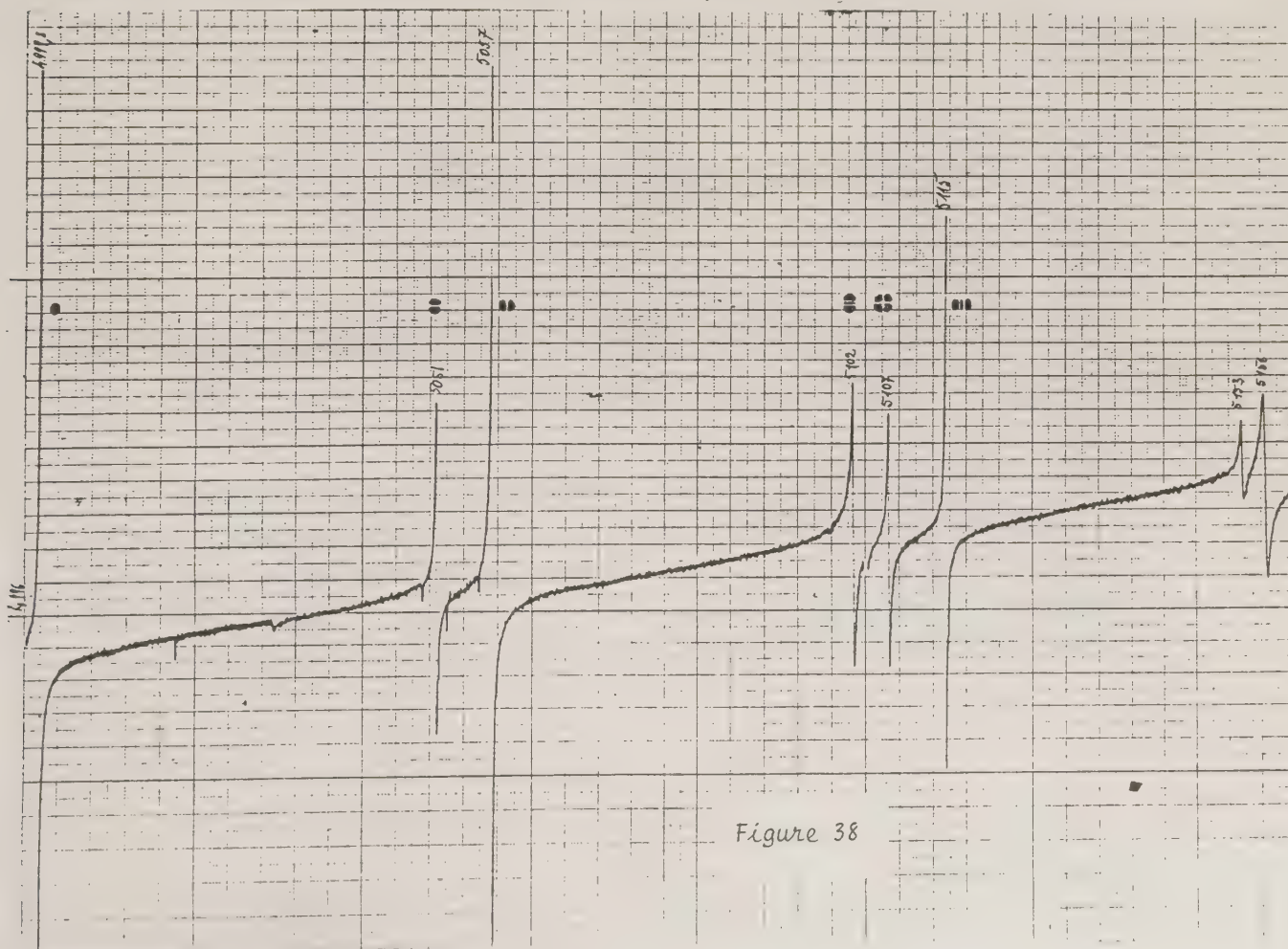
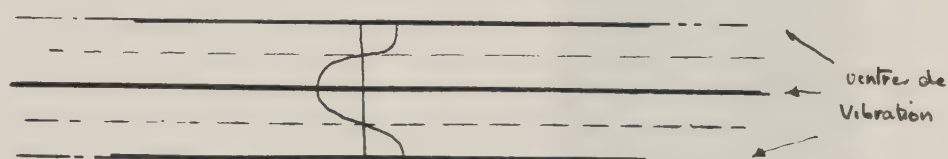


Figure 38

B - COMPLÉMENTS À L'ÉTUDE DES PARTIELS -

Nous avons excité aussi des modes appartenant à des partiels pairs . Ces partiels ont des vibrations en épaisseur symétriques par rapport au plan médiant de la pastille.



L'exemple du P_2 le représente avec ses deux noeuds et ses trois ventres (sanctionné par la topographie). Nous voyons que le potentiel de deux points situé en regard sur chaque face est le même. Nous avons donc mis le quartz en vibration en respectant la symétrie électrique, nous voyons (figure 39) le spectre de résonance au voisinage de leurs fréquences pour les modes 4.01 et 4.1.0. , sur la figure, la topographie (plan 21.0) de section du mode 4.1.0 nous révèle bien les 4noeuds de vibration et les 5 ventres suivant l'axe $\vec{y}'$ de la pastille et le noeud suivant la direction $\vec{x}$.

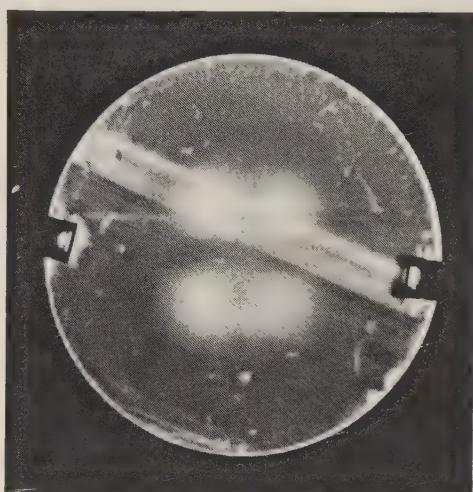
C - MISE EN VIBRATION D'UNE COUPE AT SUR LE MODE B -

VÉRIFICATION DE LA PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES -

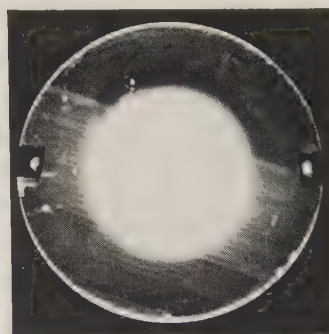
Comme nous l'avons vu au premier Chapitre, toute onde générée dans un cristal piézoélectrique par une polarisation électrique est composée de trois ondes, une onde de compression, notée Mode A, et deux de cisaillement, notées Mode B et C. Dans la coupe AT, une seule de ces trois ondes est piézoélectrique : c'est le mode C, dont la direction de polarisation est parallèle à l'axe $\vec{x}$.

Le mode B non piézoélectrique a donc une polarisation parallèle à l'axe $\vec{z}$ mais, et c'est un avantage de la coupe AT, il n'est pas possible de recueillir un signal de ce mode. Nous n'avons qu'un moyen théorique pour en situer les fréquences de résonance, si elles existent, en se basant sur ses vitesses de propagation.

Il est cependant possible de mettre en évidence une résonance de Mode B. En effet, si nous observons une topographie de projection d'un mode n.o.o de mode C de notre coupe AT effectuée à l'aide des plans OI.2 (voir chapitre II page 41, 42) nous mettons en évidence la répartition du déplacement u_3 créé par le mouvement u_1 du thickness shear et nous avons la configuration suivante :



u_3 Mode C ou u_1 Mode B



u_1 Mode C ou u_3 Mode B

Le mode B qui est aussi un cisaillement d'épaisseur doit avoir la même répartition de mode ayant les mêmes configurations que le mode C, il doit donc avoir un mode $n_{(B)}$ o.o. ayant cette fois-ci la même configuration en u_1 que celle du mode $n_{(C)}$ o.o. en u_3 visible ci-dessus. Cette fois-ci, le mouvement u_1 est piézoélectrique et doit donc générer un signal électrique à la résonance.

Nous avons mis en vibration une pastille de coupe AT en respectant la polarisation électrique et en effet, nous avons alors pu enregistrer les valeurs réelles des résonances du mode B d'une coupe AT.

Nous avons mesuré les modes suivants :

Fondamental		1190	KHz
Partiel 3	3.00	3431	KHz
" "	3.02	3531	KHz
Partiel 5	5.00	5690	KHz
" "	5.02	5793	KHz

Pour un quartz de coupe AT (rayon de courbure 150 mm - épaisseur 1,678 mm - diamètre de la pastille 15 mm) ayant une fréquence de 5096 KHz en mode ^{ici} 5.1.1. soit environ une fréquence de 4987 KHz en Partiel 5 thickness shear. (~~mode C~~)

C O N C L U S I O N

Au cours de cette étude où nous avons rencontré les utilisateurs principaux de la méthode d'analyse topographique (Durham 29.08. au 10.09 1979 et US France Coopération Service Program 12.- 14 Mars 1980) et appris les différentes possibilités nous nous sommes appliqués à en exploiter les différentes ressources pour l'étude des modes de résonance des résonateurs à quartz à ondes de volume. A cette occasion, nous avons mis au point différentes expériences d'enregistrements de spectres de résonance utilisant à la fois une détection électronique (variation de l'impédance du résonateur) et une détection photoélectrique (variation de l'intensité diffractée par un cristal lorsque ses plans réticulaires sont déformés). Nous avons étudié les différentes informations apportées par cette méthode au moyen des topographies de section ou de projections réalisées par diffraction sur les principaux plans caractéristiques des pastilles de quartz de coupe AT.

Cette étude des modes de vibration des résonateurs, nous a permis de mieux cerner les caractéristiques des vibrations piégées, leur répartition en amplitude et ainsi de mieux appréhender les paramètres de leur fabrication (diamètre, rayon de courbure, métallisation). Nous avons ainsi pu mieux comprendre les liens avec les théories existantes, notamment en ce qui concerne la dispersion des ondes dans le plan perpendiculaire à leur propagation (Mindlin, Tiersten).

Nous avons cherché à exploiter les propriétés de ces vibrations afin de concevoir des résonateurs présentant des caractéristiques désirées les rendant propices à des applications variées (base de temps, tcxo, capteurs, etc...).

A partir des observations sur la propagation des ondes dans les résonateurs à énergie piégée, nous avons proposé un essai de synthèse des modes de vibration applicables aux résonateurs à ondes de volume. Ces figures obtenues au calculateur synthétisent de façon intéressante les topographies des modes.

En perspectives, l'étude topographique devrait permettre encore d'autres investigations sur les mouvements des résonateurs (résultats qualitatifs et quantitatifs sur l'amplitude des mouvements, analyse harmonique de la vibration et des couplages de fréquences), sur l'influence des dislocations, sur le mouvement ondes vibrations, sur les dislocations pour les résonateurs excités à haute énergie. Ces recherches offrent d'autant plus d'intérêt que l'on se dirige vers une augmentation des fréquences des résonateurs à quartz (500 MHz) pour lesquels les dimensions des dislocations deviennent alors de l'ordre de grandeur des longueurs d'ondes.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) - H.F. TIERSTEN -
Linear Piezoelectric Plate Vibration
 Plenum Press - New York 1969.

- (2) - H.F. TIERSTEN -
Analysis of trapped energy resonators operating in overtones of thickness-shear.
 Proc. Annual Frequency Control Symposium - 1974

- (3) - H.F. TIERSTEN -
Analysis of overtones modes in contoured crystal resonators.
 Proc. A.F.C.S. 1977

- (4) - H.F. TIERSTEN -
Analysis of intermodulation in thickness-shear and trapped energy resonators.
Journal of Acoustical Society of Am. Vol. 57 - N°3 - Mars 1975.

- (5) - H.F. TIERSTEN -
Analysis of trapped energy resonators operating in overtones of coupled thickness-shear and thickness twist.
J. of Acoustical Society of Am. Vol. 59 - N°4 - Avril 1976.

- (6) - H.F. TIERSTEN AND B.K. SINKA -
Temperature induced frequency changes in electroded at cut quartz thickness-shear resonators.
 Rensselaer Polytechnic Institute - Troy. N.Y. 12181,

- (7) - C.J. WILSON -
Vibration modes of AT cut Convex Quartz Resonators.
J. Phys. D. Appl. Phys. 7 2449 (1974).

- (8) - M.C. SKIMIN -
Bell system technique -
J. 23 - 151 77 (1944)

- (9) - R.A. SIKES -
Bell system technique -
J. 23 - 52 96 (1944)

- (10) - W.S. MORTLEY -
1951 Wireless World 57 399 403

- (11) - W.S. MORTLEY -
1957 Proc. I.E.E.E. 104B 239 49.

- (12) - W.D. BEAVER -
Proc. 27th Annual Frequency Symposium.
Cherry Hill - N.J. (Washington - D.C. Electronic Industries ASSA).

- (13) - R.D. MINDLIN AND R.K. KAUL -
Frequency spectrum of amonoclinic crystal plate.
J. of Acoustical Society - Vol. 34 n°12 - Décembre 1962.

- (14) - R.D. MINDLIN -
Thickness shear and flexural vibration of contoured crystal plates.
J. Apply. Vol.25 N°1 - Janvier 1954.

- (15) - R.D. MINDLIN AND H. DERESIEWIEZ -
Thickness-shear and flexural vibration of rectangular crystal plates.
J. of App. Phys. - Vol. 26 - N°12 - Décembre 1955.

- (16) - E. DIEULESAINT - D. ROYER -
Ondes Elastiques dans les solides.
Masson et Cie - 1974.

- (17) - B.A. AULD -
Acoustic fields and waves in solids.
J. Willey and Sons - N.Y. 1973.

- (18) - A.W. LEISSA -
Vibration of Plates.
Off. of technology - Nasa SP 160 - Washington D.C. (1969).

- (19) - J.J. GAGNEPAIN -
Mécanismes non-linéaires dans les résonateurs à quartz.
 Thèse d'Etat - Faculté des Sciences de Besançon -
- (20) - B. DULMET -
Etude de quelques paramètres régissant le fonctionnement des résonateurs à quartz.
 Thèse de Docteur-Ingénieur - Université de Besançon - 1978.
- (21) - G. GENESTIER -
Thèse de Docteur-Ingénieur à Paraître -
 Faculté des Sciences de Besançon.
- (22) - R. BECHMAN - A.D. BALLATO - T.J. LUKASZEK -
High order temperature coefficients of the elastic stiffnesses and compliances of alpha-quartz.
 USAELRDL Technical Rapport 2261 - Septembre 1963.
- (23) - ERICH HAFNER -
Crystal Resonators -
 I.E.E.E. Trans. on Sonics an Ultra. Vol. su 21 - N°4 - Octobre 1974.
- (24) - A.W. WARNER -
Design and performance of ultra precise.
2.5 MC Quartz Crystal Units -
 Bell system Techn. Journal - Septembre 1960 - PP. 1193 - 1217.
- (25) - K. IIJIMA - Y. TSUZUKI - Y. HIROSE AND M. AFIYAMA -
Laser interferometrie - Measurement of the vibration -
Displacements of a Plano-convex AT cut quartz crystal resonator -
 Proc. I.E.E.E. Lett - Vol. 64 N°3 - pp 386 - 387 - Mars 1976 -
- (26) - Y. TSUZUKI - Y. HIROSE AND K. IIJIMA -
Measurement of Vibration modes of piezoelectric resonators by means of holography.
 Proc. of the 25th Annual Frequency Control Symposium - pp. 113 - 117 -
 Avril 1971.

- (27) - Groth. Defect in crystal by method of Xray beam -
Durham - 29 Août - 10 Septembre 1979.
Proc. à Paraître.
- (28) - W.J. SPENCER -
Observation of resonant vibrations and defect structure in single
crystals by Xray - Diffraction Topography.
Physical Acoustics - 5, 111 -161 (1968).
- (29) - B.K. TANNER -
Xray diffraction topography -
Pergamon press - Oxford - 1976.
- (30) - K. HARUTA -
Intensity of Xrays diffracted from elastically vibrating single
crystal plate.
J. of App. Phys. - Juin 1961 - P. 3312.

ANNEXE I

REALISATION DES "SPECTRES ELECTRIQUES" ET "MECANIQUES"

Il est nécessaire de préciser quelques particularités du schéma bloc de la page.

En sortie du voltmètre, nous devons retrancher au signal continu délivré une quantité correspondant au courant traversant la capacité "Co" du résonateur (capacité correspondant à celle formée par les deux électrodes du résonateur). Ce courant croît avec la fréquence, seule la variation de ce courant autour de la valeur délivrée par la capacité nous intéresse.

Notre montage ne nous permet pas de retrancher cette valeur en continue et de garder donc la même sensibilité sur la table traçante. Nous avons réalisé ces spectres en faisant varier la fréquence par étape de 1000 KHz à 500 KHz à 15 000 KHz. La variation du courant qui traverse la capacité est alors beaucoup plus forte au voisinage de 500 KHz que des 15 000 KHz.

La valeur de $\frac{1}{C_o \omega}$ diminue de 67% entre 500 K et 1500 KHz

et seulement de 7% entre 14 000 KHz et 15 000 KHz -

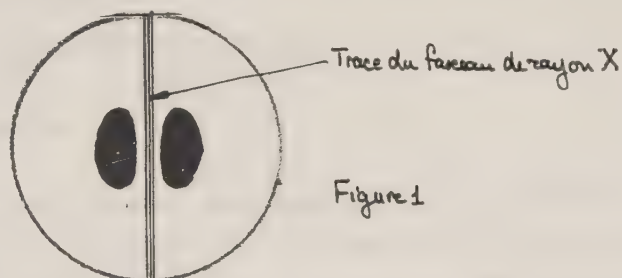
pour avoir une sensibilité équivalente nous devons modifier la plage, balayer et la réduire à 100KHz voire 10 KHz dans les fréquences basses du quartz.

Pour réaliser les "spectres mécaniques", il est nécessaire que l'amplitude de vibration du cristal soit importante afin que la quantité d'énergie diffractée permette une lecture claire. Deux points sont à respecter pour cela :

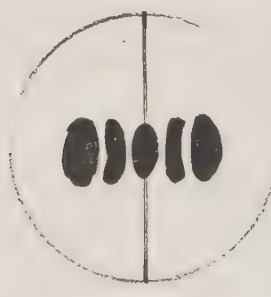
a/ Le quartz devra donc atteindre son régime de fonctionnement maximum, ce qui nécessite un balayage en fréquence compatible avec le coefficient de qualité des fréquences que l'on veut visualiser.

b/ La puissance d'excitation devra être en rapport avec l'amplitude désirée et donc avec la vitesse de balayage en fréquence.

Il est important de remarquer d'autre part que cette méthode ne peut pas permettre l'enregistrement d'un spectre complet et que l'amplitude de l'énergie diffractée n'est pas en rapport avec l'importance de la résonance du mode. En effet, ces spectres sont réalisés en attaquant le quartz avec un faisceau de rayon X relativement étroit et parallèle au plan 2I.0. Certains modes, comme le montre la figure 1, risquent donc de ne pas être pris en compte



et l'intensité diffractée dans le cas de la figure 2A sera plus importante que dans le cas de la figure 2B.



ANNEXE II

SIMULATION DE MODE DE VIBRATION

Nous avons cherché à calculer les figures d'interférences "mécaniques" dues à la superposition d'ondes émises par des sources réparties sur un cercle, pour vérifier la validité de nos hypothèses.

Mais ce calcul n'est pas une chose aisée. La somme de plusieurs cosinus d'expression comportant des racines carrées du type :

$$\sum_j A_j \cos k \sqrt{(x_j - x)^2 + M(y_j - y)^2}$$

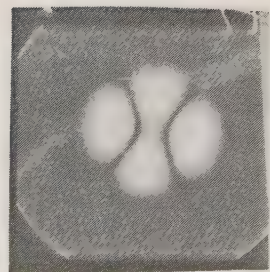
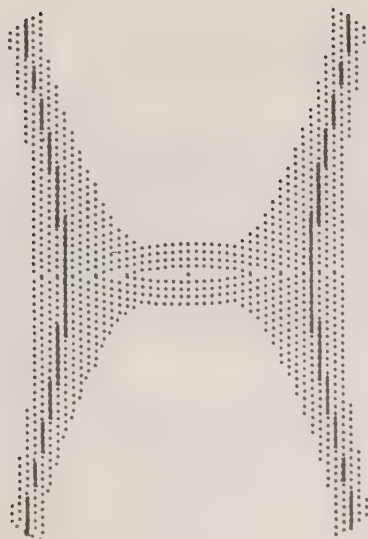
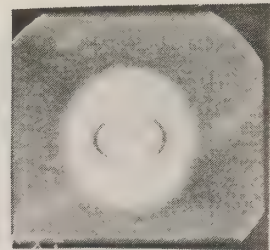
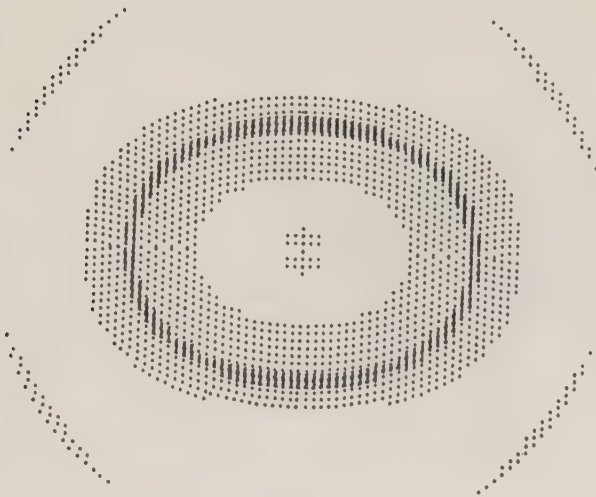
est très lourde à manipuler

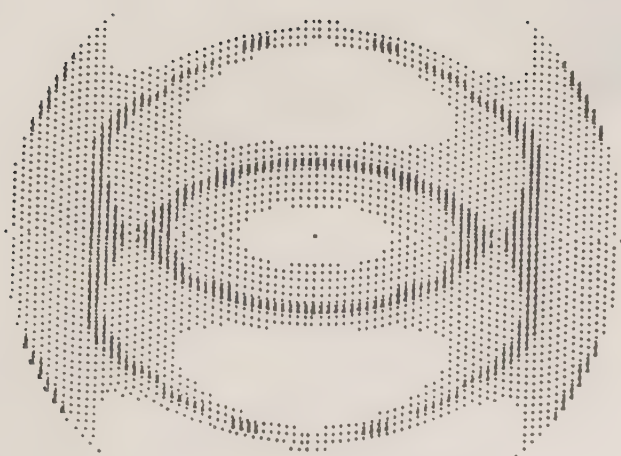
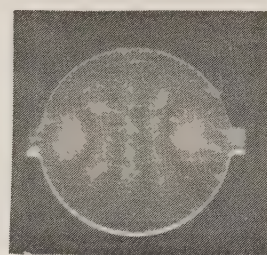
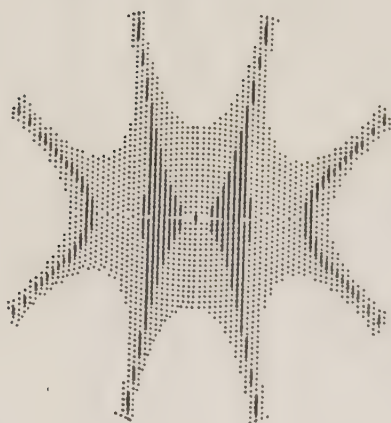
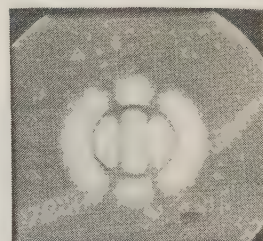
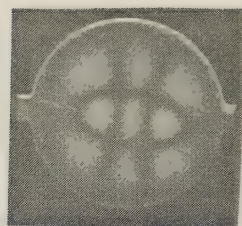
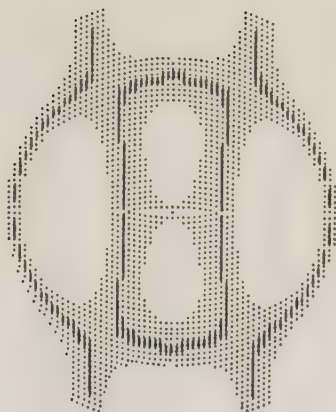
Dans le cas du quartz plan convexe, nous devrions en plus définir un $k(x, y)$ variable et un (x_j, y_j) variable avec la pulsation ω . Nous pouvons néanmoins nous affranchir de quelques paramètres afin de simplifier le calcul. Dans un premier temps, nous imposons un nombre d'onde constant car la longueur du calcul dans le cas variable aurait été énormément allongé compte-tenu du matériel dont nous disposons. La variation du cercle des sources en fonction de la fréquence a été remplacé par la variation du nombre d'onde en fonction de la fréquence, ce qui revient au même.

Le piégeage caractéristique des pastilles plan-convexes aurait nécessité la définition d'un k imaginaire pour les (x, y) extérieur au cercle des sources, ce qui était très compliqué. Nous avons tourné la difficulté en supposant le milieu infini et en négligeant les effets extérieurs au cercle des sources.

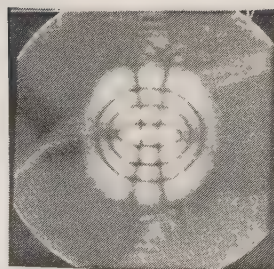
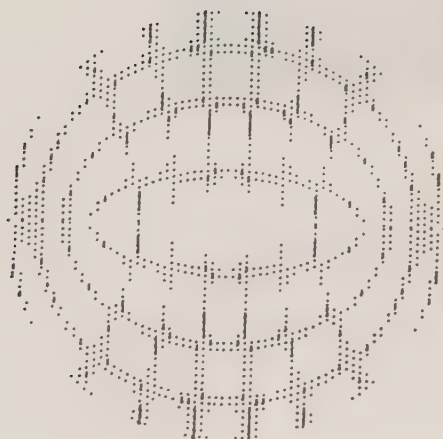
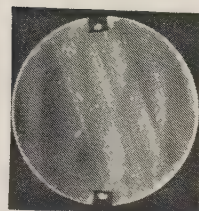
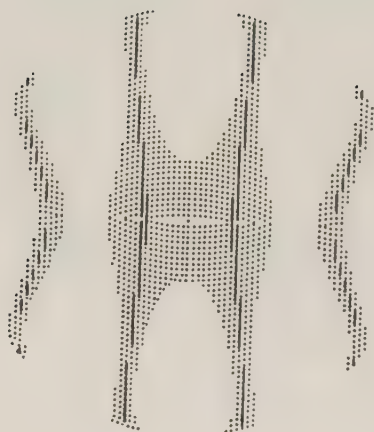
Malgré tous ces raccourcis, nous avons obtenu de bons résultats sur l'allure générale des modes à faible indice. Les modes à fort indice nécessitaient l'emploi d'un nombre de points multiplié par 10 voire 100, ce qui n'était pas réalisable, car le calculateur 9830 H.P. met déjà de 10 à 20 heures pour calculer une figure.

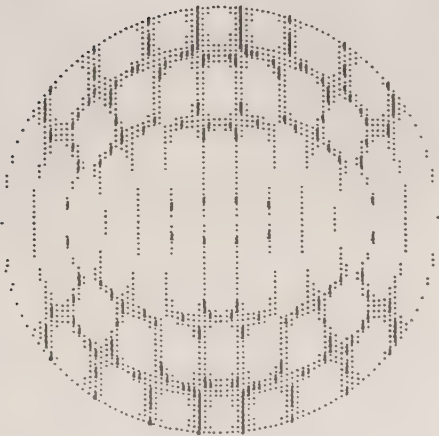
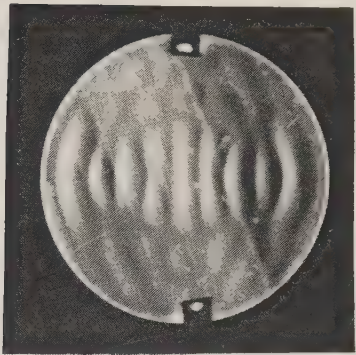
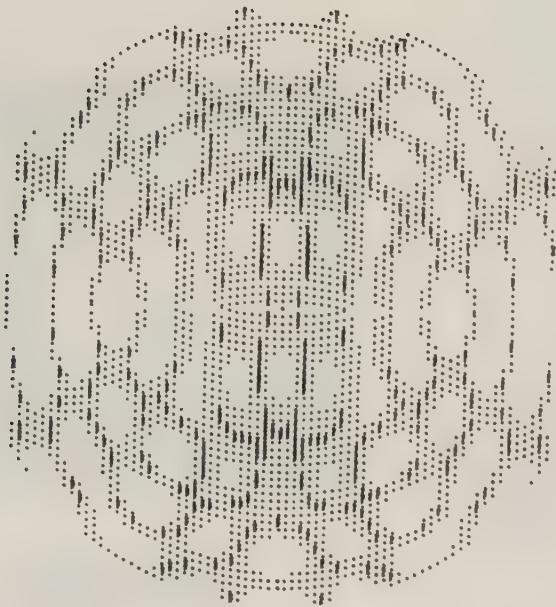
Pour $k = 0$, nous devons retrouver le mode $n.00$, car cela correspond à un cercle réduit à 1 point. Nous avons réalisé les cas symétriques suivants :

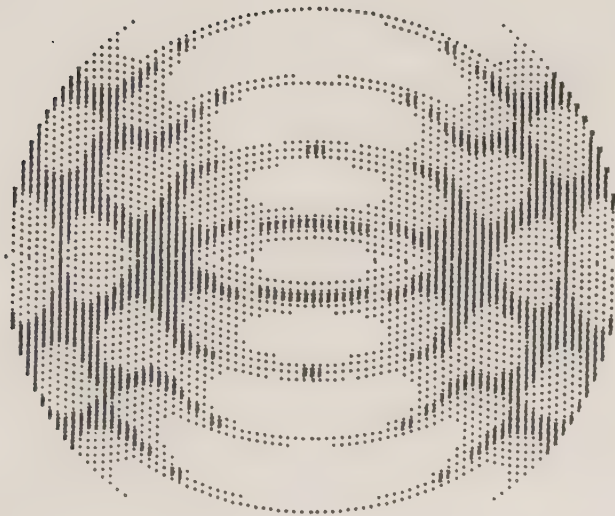
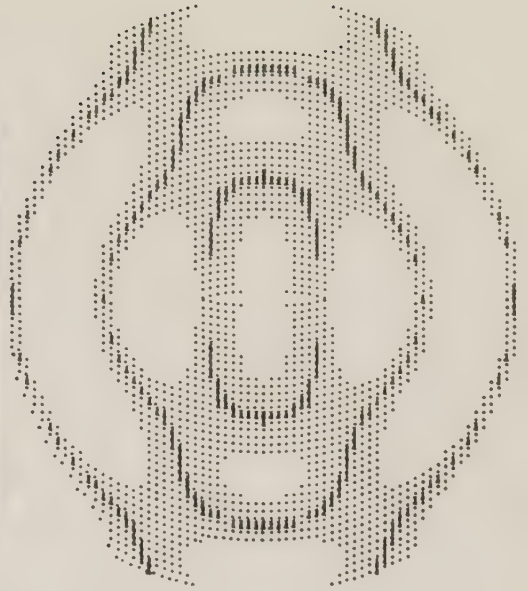
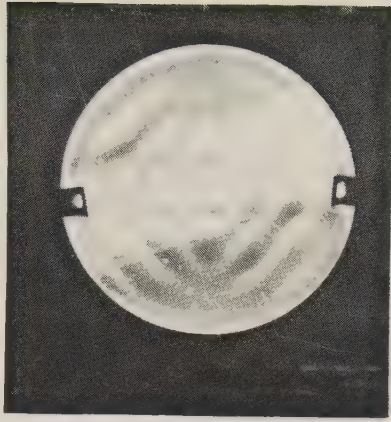
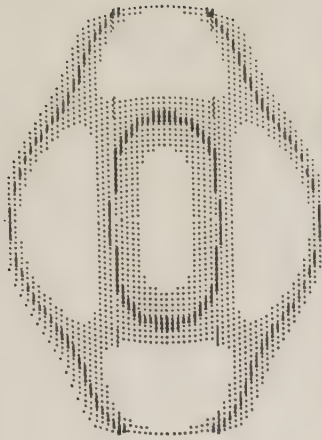




6.2.57
H. 42446
F. 32.9875







Coupe SC.

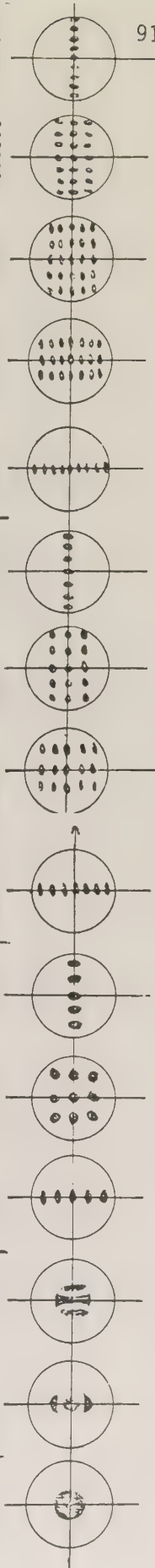
PHI=	22.50	THETA=	34.50
COEFFICIENTS ELASTIQUES (* 10E+10)			
8.674	0.217	1.673	-0.016
0.217	11.543	-0.381	0.861
1.673	-0.381	10.996	0.339
-0.016	0.861	0.339	4.222
-1.364	0.051	1.312	-0.972
-0.937	1.910	-0.972	0.051
COEFFICIENTS PIEZOELECTRIQUES			
0.112	0.098	0.106	-0.111
-0.146	0.026	0.012	-0.018
0.100	-0.018	-0.008	0.012
PERMITTIVITES			
4.500	0.000	0.000	
0.000	4.532	0.047	
0.000	0.047	4.568	
VITESSES (PROPAGATION suivant y)			
6752.3	3962.1	3609.1	
COMPOSANTES (dans [xyz])			
0.227	0.228	0.947	
0.968	0.054	-0.245	
0.107	-0.972	0.208	

Coupe AT.

PHI=	0.00	THETA=	34.50
COEFFICIENTS ELASTIQUES (* 10E+10)			
8.674	-0.815	2.705	-0.412
-0.815	12.945	-0.751	0.649
2.705	-0.751	10.334	0.948
-0.412	0.649	0.948	3.852
0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.201
COEFFICIENTS PIEZOELECTRIQUES			
0.171	0.075	0.096	-0.095
0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.109
PERMITTIVITES			
4.500	0.000	0.000	
0.000	4.532	0.047	
0.000	0.047	4.568	
VITESSES (PROPAGATION suivant y)			
7000.2	3783.9	3317.6	
COMPOSANTES (dans [xyz])			
0.000	0.000	1.000	
0.997	0.071	0.000	
0.071	-0.997	0.000	

n, m, p
 $n \rightarrow$ *points sur Y*
 $m \rightarrow$ *X*
 $p \rightarrow$ *Z*
valable pour coupe Y=0

N	TS n.00	TT n.02	AS n.20	TT ord. sup. n.04	AS/TT n.22	AS ord. sup. n.40	n.06	n.24	n.42	n.60	n.08	n.26	n.44	n.62	n.80
1*	1042.4	1135.0	1152.2	1220.6	1242.2	1263.6	1303.6	1321.0	1341.0	1359.3	1376.0	1395.2	1414.2	1433.0	1451.4
3*	2018.4	2117.4	2122.2	2213.4	3216.0	3224.6	3306.4	3311.0	3315.6	3320.0	3397.0	3401.4	3405.3	3410.2	3414.6
5*	5000.0	5100.2	5114.4	5198.4	5212.4	5226.4	5294.8	5303.5	5322.4	5336.0	5389.6	5403.0	5416.6	5430.0	5443.4
7*	6977.0	7077.0	7086.0	7177.2	7185.2	7193.2	7275.2	7293.2	7291.0	7299.0	7372.0	7379.8	7387.6	7395.4	7403.2
9*	9957.0	9953.0	9971.0	9957.0	9971.6	9985.0	9257.0	9270.4	9283.6	9296.3	9355.0	9368.0	9381.2	9394.2	9407.4
11*	10934.2	11035.6	11044.0	11126.0	11145.0	11153.3	11235.6	11244.4	11253.2	11262.0	11334.2	11343.0	11351.3	11360.6	11369.2
13*	12914.2	13015.6	13029.8	13116.4	13130.4	13144.6	13216.2	13230.2	13244.2	13258.2	13315.4	13329.4	13343.2	13357.2	13371.0
15*	14891.4	14993.0	15002.4	15094.0	15103.2	15112.6	15194.2	15203.4	15212.6	15221.8	15293.8	15303.0	15312.2	15321.2	15330.4
17*	16872.2	16973.8	16992.2	17074.3	17093.2	17111.6	17175.4	17193.6	17211.8	17230.0	17275.2	17293.4	17311.4	17329.6	17347.6
19*	18848.4	18950.0	18959.6	19051.4	19060.3	19070.4	19152.0	19161.4	19171.0	19180.4	19252.2	19261.6	19271.0	19280.4	19289.8
21*	20822.4	20924.2	20916.4	21025.6	21017.4	21010.0	21126.4	21118.8	21113.0	21103.2	21226.8	21219.2	21211.4	21203.6	21196.0
23*	22805.2	22907.2	22916.8	23024.6	23018.2	23027.8	23109.4	23119.2	23128.8	23138.4	23210.0	23219.6	23229.2	23238.8	23248.4
25*	24782.8	24884.8	24891.2	24996.2	24992.6	24999.0	25087.4	25093.6	25100.0	25106.2	25188.0	25194.2	25200.6	25206.8	25213.2
27*	26762.2	26864.2	26874.0	26965.6	26975.4	26985.2	27066.8	27076.6	27086.2	27096.0	27167.6	27177.4	27187.0	27196.8	27206.4
29*	28740.2	28842.2	28850.2	28942.8	28951.8	28959.8	29045.0	29053.0	29061.0	29069.0	29145.8	29153.8	29161.8	29170.0	29178.0
31*	30719.0	30821.0	30831.0	30922.8	30932.6	30942.4	31024.0	31033.8	31043.6	31053.6	31125.0	31134.8	31144.6	31154.4	31164.2
33*	32697.2	32799.2	32808.0	32901.0	32909.6	32918.4	33002.2	33011.0	33019.6	33028.4	33103.4	33112.0	33120.6	33129.4	33138.0
35*	34676.0	34778.0	34783.0	34879.6	34889.6	34899.6	34981.2	34991.0	35001.0	35011.0	35082.2	35092.2	35102.0	35112.0	35121.8
37*	36654.2	36756.2	36765.4	36858.0	36867.0	36876.0	36959.4	36968.4	36977.6	36986.6	37060.6	37069.6	37078.6	37087.6	37096.6
39*	38632.8	38735.0	38745.0	38836.8	38846.8	38856.8	38938.2	38948.2	38958.2	38968.2	39039.4	39049.4	39059.4	39069.4	39079.4
41*	40611.2	40713.2	40722.4	40815.0	40824.2	40833.4	40916.6	40925.8	40935.0	40944.2	41017.8	41027.0	41036.2	41045.4	41054.6
43*	42589.8	42691.8	42702.0	42793.6	42803.8	42814.0	42895.2	42905.4	42915.6	42925.6	42996.6	43006.8	43016.8	43027.0	43037.0
45*	44568.0	44670.2	44679.6	44772.0	44781.4	44790.8	44873.6	44883.0	44892.4	44901.6	44975.0	44984.4	44993.6	45003.0	45012.4



n 0.10	n 2.8	n 4.6	n 6.4	n 8.2	n 10.0	n 0.12	n 2.10	n 4.8	n 6.6	n 8.4	n 10.2	n 12.0
1447.6	1465.8	1483.8	1501.8	1519.4	1536.8	1516.6	1532.2	1550.4	1567.4	1584.4	1601.2	1617.6
3485.2	3489.6	3493.8	3498.2	3502.4	3506.8	3571.2	3575.4	3579.6	3583.8	3588.0	3592.2	3596.4
5482.6	5496.0	5509.2	5522.4	5535.6	5548.8	5574.2	5587.2	5600.4	5613.4	5626.4	5639.4	5652.2
7467.6	7475.2	7483.0	7490.6	7498.2	7506.0	7561.8	7569.4	7577.0	7584.6	7592.2	7604.8	7617.4
9451.8	9464.8	9477.8	9490.8	9503.8	9516.6	9547.6	9560.6	9573.4	9586.2	9599.2	9612.0	9624.8
11432.2	11440.8	11449.4	11458.2	11466.8	11475.4	11529.0	11537.6	11546.2	11554.8	11563.4	11572.0	11580.6
13414.0	13427.8	13441.6	13455.4	13469.0	13482.8	13511.6	13525.4	13539.0	13552.8	13566.4	13580.2	13593.6
15392.8	15401.8	15411.0	15420.0	15429.2	15438.2	15491.0	15500.2	15509.2	15518.2	15527.2	15536.4	15545.4
17374.6	17392.6	17410.6	17428.6	17446.6	17464.6	17473.4	17491.2	17509.2	17527.0	17545.0	17562.8	17580.6
19351.8	19361.2	19370.6	19380.0	19389.2	19398.6	19451.0	19460.2	19469.6	19479.0	19488.2	19497.6	19506.8
21326.8	21319.0	21311.4	21303.8	21296.0	21288.4	21425.2	21413.6	21411.0	21403.2	21395.6	21388.0	21380.4
23310.2	23319.6	23329.2	23338.8	23348.2	23357.8	23400.0	23410.2	23428.8	23438.2	23447.8	23457.2	23466.8
25288.2	25294.6	25300.8	25307.0	25313.2	25319.6	25388.2	25394.4	25400.6	25406.8	25413.0	25419.2	25425.6
27268.0	27277.6	27287.4	27297.0	27306.6	27316.4	27363.0	27377.6	27387.4	27397.0	27406.6	27416.2	27425.8
29246.4	29254.4	29262.4	29270.4	29278.4	29286.4	29346.6	29354.6	29362.6	29370.4	29378.4	29386.4	29394.4
31225.6	31235.4	31245.2	31255.0	31264.8	31274.4	31326.0	31335.0	31345.4	31355.2	31365.0	31374.6	31384.4
33204.2	33212.8	33221.4	33230.0	33238.6	33247.2	33304.0	33313.2	33321.8	33330.4	33339.0	33347.6	33356.2
35183.2	35193.0	35202.8	35212.8	35222.6	35232.4	35283.6	35293.6	35303.4	35313.2	35323.0	35332.8	35342.6
37161.6	37170.6	37179.6	37188.6	37197.4	37206.4	37252.2	37261.2	37280.2	37289.0	37298.0	37307.0	37316.0
39140.4	39150.4	39160.4	39170.4	39180.4	39190.2	39241.2	39251.2	39261.0	39271.0	39281.0	39290.8	39300.8
41119.0	41128.0	41137.2	41146.4	41155.6	41164.8	41210.3	41223.8	41238.0	41247.2	41256.4	41265.6	41274.6
43097.8	43107.8	43118.0	43128.0	43138.0	43148.2	43193.6	43203.6	43218.8	43228.8	43238.8	43248.8	43259.0
45076.2	45085.4	45094.8	45104.2	45113.4	45122.8	45177.0	45186.4	45195.6	45205.0	45214.2	45223.6	45232.8

